ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 255, с. 197–215

УДК 517.5

Неравенство разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца[1]

©2006 г. Е. Д. Нурсултанов[2]

Поступило в мае 2005 г.

Пусть (X,Y) — пара нормированных пространств таких, что $X\subset Y\subset L_1[0,1]^n$, $\{e_k\}_k$ — некоторая расширяющаяся последовательность конечных множеств из $\mathbb{Z}^n$ относительно скалярного или векторного параметра k, $k\in\mathbb{N}$ или $k\in\mathbb{N}^n$. Изучаются свойства последовательности норм $\{\|S_{e_k}(f)\|_X\}_k$ сумм Фурье фиксированной функции $f\in Y$. В качестве пространств X, Y рассмотрены пространства Лебега $L_p[0,1]$, Лоренца $L_{p,q}[0,1]$, $L_{p,q}[0,1]^n$, анизотропные пространства Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^*}[0,1]^n$. Последовательность $\{e_k\}_k$ в одномерном случае — это отрезки, а в многомерном является последовательностью гиперболических крестов или последовательностью параллелепипедов из $\mathbb{Z}^n$. Для тригонометрических полиномов со спектром из ступенчатых гиперболических крестов и параллелепипедов получены различные формы неравенств разных метрик в пространствах Лоренца $L_{p,q}[0,1]^n$, $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^*}[0,1]^n$.

Для функции $f\in L_1[0,1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_ke^{2\pi ikx}$ и конечного множества $e\subset\mathbb{Z}^n$ определим сумму

$$S_e(f,x)=\sum_{k\in e}a_ke^{2\pi ikx},$$

которую назовем суммой Фурье функции f, соответствующей множеству e.

Пусть (X,Y) — пара нормированных пространств таких, что $X\subset Y\subset L_1[0,1]^n$, $\{e_k\}_k$ — некоторая расширяющаяся последовательность конечных множеств из $\mathbb{Z}^n$ относительно скалярного или векторного параметра k, $k\in\mathbb{N}$ или $k\in\mathbb{N}^n$.

В настоящей работе изучаются свойства последовательности норм $\{\|S_{e_k}(f)\|_X\}_k$ сумм Фурье фиксированной функции $f\in Y$. В качестве пространств X, Y будут рассмотрены пространства Лебега $L_p[0,1]$, Лоренца $L_{p,q}[0,1]$, $L_{p,q}[0,1]^n$, анизотропные пространства Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^*}[0,1]^n$ (см. [1–4]). В одномерном случае $\{e_k\}_k$ будет обозначать последовательность отрезков, а в многомерном — последовательность гиперболических крестов или последовательность параллелепипедов.

Если $(X,Y)=(L_p[0,1],L_p[0,1])$, $1<p<\infty$, $e_k=[-k,+k]\cap\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$, по теореме М. Рисса об ограниченности частичных сумм имеет место неравенство

$$\|S_k(f)\|_{L_p}\le c_p\|f\|_{L_p},\qquad\text{т.е.}\qquad \|S_k(f)\|_{L_p}=O(1),\quad k\to\infty.$$

В случае $(X,Y)=(L_\infty[0,1],L_\infty[0,1])$ задача рассматривалась в работах [5–7]. Э. Буско [6] показал, что

$$\sup_{\|f\|_{L_\infty}=1}\varliminf_{n\to\infty}\frac{\|S_n(f)\|_{L_\infty}}{L_n}>0,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта “Лучший преподаватель вуза” Республики Казахстан.

[2]Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Астана, 473021 Казахстан.
E-mail: er-nurs@yandex.ru

где $L_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$, $n \to \infty$, — константы Лебега. К.И. Осколков [7] получил уточнение

$$\sup_{\|f\|_{L_\infty}=1} \varliminf_{n\to\infty} \frac{\|S_n(f)\|_{L_\infty}}{L_n} = \frac{1}{2}.$$

Когда X, Y — различные пространства Лебега или Лоренца, эта задача тесно связана с неравенством разных метрик С.М. Никольского [8].

Из неравенств разных метрик для пространств Лебега и пространств Лоренца [9] при $1 < p \le r \le \infty$, $0 < s < q \le \infty$, $f \in L_p[0,1]$ и $g \in L_{p,q}[0,1]$ следуют неравенства

$$\|S_n(f)\|_{L_r[0,1]} \le c_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L_p[0,1]}, \tag{1}$$

$$\|S_n(g)\|_{L_{p,s}[0,1]} \le c_{p,q} (\ln(n+2))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \|g\|_{L_{p,q}[0,1]}, \tag{2}$$

откуда немедленно следуют

$$\|S_n(f)\|_{L_r} = O\big(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\big), \qquad n \to \infty,$$

$$\|S_n(g)\|_{L_{p,s}} = O\big((\ln n)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\big), \qquad n \to \infty.$$

В первой части работы доказаны следующие соотношения:

$$\|S_n(f)\|_{L_r} = o\big(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\big), \qquad n \to \infty,$$

$$\|S_n(g)\|_{L_{p,s}} = o\big((\ln n)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\big), \qquad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|S_n(f)\|_{L_r}\big)^p}{n} \le c\|f\|_{L_p}^p, \tag{3}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\big((\ln n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \|S_n(g)\|_{L_{p,s}}\big)^q}{n \ln n} \le c\|g\|_{L_{p,q}}^q. \tag{4}$$

Последние неравенства характеризуют скорость стремления к нулю последовательностей $\big\{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|S_n(f)\|_{L_r}\big\}$ и $\big\{(\ln n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \|S_n(g)\|_{L_{p,s}}\big\}$. Показано, что оценки (3) и (4) точны.

Во второй части работы получено неравенство разных метрик для анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n$. В этих классах векторные параметры $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ характеризуют интегральные свойства функции $f(x_1, \dots, x_n)$ индивидуально по каждой переменной x_j, а параметр $\star = (j_1, \dots, j_n)$, являющийся перестановкой последовательности $(1, 2, \dots, n)$, определяет порядок интегрирования в $\|\cdot\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}$. Получены неравенства типа (3), (4) в анизотропных пространствах для сумм Фурье со спектром из ступенчатых гиперболических крестов и параллелепипедов.

1. ПРОСТРАНСТВА $N_\psi^{\alpha,q}(L_p, M)$ И ИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^n$. Фиксированную систему семейств $M = \{G_k\}_{k=1}^\infty$ из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих условию

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset \ldots,$$

назовем сетью в $\mathbb{Z}^n$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q \le \infty$, $M = \{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная сеть, $\mathbf{X}$ — линейное нормированное пространство, вложенное в $L_1[0,1]^n$, $\psi\colon G_1 \to \mathbb{N}$ — функция множеств.

Будем говорить, что f из $L_1[0,1]^n$ принадлежит пространству $N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M)$, если конечна величина

$$\|f\|_{N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha}\sup_{e\in G_k}\frac{1}{\psi(e)}\|S_e(f)\|_{\mathbf{X}}\right)^q\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Здесь и в дальнейшем при $q=\infty$ выражения $\bigl(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\frac{1}{k}\bigr)^{1/q}$ и $\bigl(\int_0^1|f(t)|^q\frac{dt}{t}\bigr)^{1/q}$ будем понимать как $\sup_k|b_k|$ и $\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$ соответственно.

Имеют место следующие свойства пространств $N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M)$.

1. Если $M_1 \subset M_2$, то

$$N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M_2) \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M_1).$$

2. При $0 < q \le q_1 \le \infty$ имеет место вложение

$$N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M) \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q_1}(\mathbf{X},M).$$

3. Если $\alpha < \alpha_1$, $0 < q, q_1 \le \infty$, то верно

$$N_{\psi}^{\alpha_1,q_1}(\mathbf{X},M) \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M).$$

Пусть (A_0,A_1) — совместимая пара банаховых пространств [11],

$$K(t,a;A_0,A_1) = \inf_{a=a_0+a_1}\bigl(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\bigr), \qquad a\in A_0+A_1, \quad t>0,$$

— функционал Петре.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} = \left\{a\in A_0+A_1\colon\ \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^{\infty}\bigl(t^{-\theta}K(t,a)\bigr)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty} = \left\{a\in A_0+A_1\colon\ \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,a) < \infty\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \le \infty$, M — *произвольная сеть в* $\mathbb{Z}^n$. *Имеет место вложение*

$$\bigl(N_{\psi}^{\alpha_0,q_0}(\mathbf{X},M), N_{\psi}^{\alpha_1,q_1}(\mathbf{X},M)\bigr)_{\theta,q} \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M),$$

где $0<\theta<1$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство. Для определенности положим $\alpha_0 > \alpha_1$. В силу вложения $N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M) \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,\infty}(\mathbf{X},M)$ достаточно показать отношение

$$\bigl(N_{\psi}^{\alpha_0,\infty}(\mathbf{X},M), N_{\psi}^{\alpha_1,\infty}(\mathbf{X},M)\bigr)_{\theta,q} \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q}(\mathbf{X},M).$$

Пусть $M = \{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in N_{\psi}^{\alpha_0,\infty}(\mathbf{X},M)$ и $f_1 \in N_{\psi}^{\alpha_1,\infty}(\mathbf{X},M)$. Очевидно,

$$\sup_{e\in G_k}\frac{1}{\psi(e)}\|S_e(f)\|_{\mathbf{X}} \le \sup_{e\in G_k}\frac{1}{\psi(e)}\|S_e(f_0)\|_{\mathbf{X}} + \sup_{e\in G_k}\frac{1}{\psi(e)}\|S_e(f_1)\|_{\mathbf{X}}.$$

Если обозначить $v(t) = t^{\frac{1}{\alpha_0-\alpha_1}}$, $t \in [1,\infty)$, то

$$\sup_{v(t)\ge k} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}} \le \sup_{k\ge 1} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f_0)\|_{\mathbf{X}} + \sup_{v(t)\ge k} k^{\alpha_0-\alpha_1} k^{\alpha_1} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f_1)\|_{\mathbf{X}} \le$$

$$\le \sup_{k\ge 1} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f_0)\|_{\mathbf{X}} + t \sup_{k\ge 1} k^{\alpha_1} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f_1)\|_{\mathbf{X}}.$$

Учитывая произвольность представления $f = f_0 + f_1$, имеем

$$\sup_{v(t)\ge k} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}} \le K\big(t, f; N_\psi^{\alpha_0,\infty}, N_\psi^{\alpha_1,\infty}\big).$$

Поэтому при $0 < q \le \infty$ будут верны

$$\left(\int_0^\infty \Big(t^{-\theta} K\big(t, f; N_\psi^{\alpha_0,\infty}, N_\psi^{\alpha_1,\infty}\big)\Big)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left(\int_1^\infty \bigg(t^{-\theta} \sup_{v(t)\ge k} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}}\bigg)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge \left((\alpha_0-\alpha_1) \int_1^\infty \bigg(t^{-\theta(\alpha_0-\alpha_1)} \sup_{t\ge k} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}}\bigg)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge c_1 \left(\sum_{r=1}^\infty \bigg(2^{-\theta r(\alpha_0-\alpha_1)} \sup_{2^r\ge k} k^{\alpha_0} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}}\bigg)^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\ge c_1 \left(\sum_{r=1}^\infty \bigg(2^{\alpha r} \sup_{e\in G_{2^r}} \frac{1}{\psi(e)} \|S_e(f)\|_{\mathbf{X}}\bigg)^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|f\|_{N_\psi^{\alpha,q}(\mathbf{X},M)}.$$

С учетом того, что при $q = \infty$ под выражениями $\big(\int_0^\infty (\varphi)^q \frac{dt}{t}\big)^{1/q}$ и $\big(\sum |b_k|^q\big)^{1/q}$ понимаются соответственно $\sup_{t>0} \varphi(t)$ и $\sup_k |b_k|$, теорема доказана.

2. О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ L_r-НОРМ СУММ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ИЗ $L_{p,q}$

Приведем определение многопараметрического пространства Лоренца $L_{p,q_1,\dots,q_n}[0,1]^n$ [14].

Пусть f — функция, измеримая относительно n-мерной меры Лебега μ, определенная на $[0,1]^n$,

$$m(\sigma, f) = \mu\{x\colon\ |f(x)| > \sigma\}$$

— ее функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma\colon\ m(\sigma, f) \le t\}$$

называется *невозрастающей перестановкой* функции f.

Пространство Лоренца $L_{p,q}[0,1]^n$ определим как пространство измеримых функций f с нормой

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\sum_{k=1}^\infty \big(\xi_k^*(f)\big)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $\big\{\xi_k^*(f)\big\}_{k=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\xi_m(f) = \left(\int_{2^{-m}}^{2^{-(m-1)}} |f^*(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Пусть норма пространства $L_{p,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n$ определена:

$$\|f\|_{L_{p,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(\xi_k^*(f)\bigr)^{q_r}\right)^{\frac{1}{q_r}}.$$

Тогда норму пространства $L_{p,q_1,\ldots,q_r,q_{r+1}}[0,1]^n$ определим как

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(\eta_k^*(f)\bigr)^{q_{r+1}}\right)^{\frac{1}{q_{r+1}}},$$

где $\bigl\{\eta_k^*(f)\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\eta_k = \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1}\bigl(\xi_m^*(f)\bigr)^{q_r}\right)^{\frac{1}{q_r}}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

В случае $q_1=q_2=\ldots=q_r=q$ пространство $L_{p,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n$ совпадает с $L_{p,q}[0,1]^n$.

Пространства $L_{p,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n$ обладают следующими свойствами [14].

1. Пусть $0<p,q_i,d_i\le\infty$. Для произвольного $\varepsilon>0$ имеет место вложение

$$L_{p,d_1,\ldots,d_r}[0,1]^n \hookrightarrow L_{p-\varepsilon,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n.$$

2. Если $s=\min\bigl\{i\colon q_i\ne d_i,\ i=\overline{1,r}\bigr\}$ и $q_s<d_s$, то

$$L_{p,q_1,\ldots,q_r}[0,1]^n \hookrightarrow L_{p,d_1,\ldots,d_r}[0,1]^n.$$

3. Пусть $0<p<\infty$, $0<q_i,d_i\le\infty$, $s=\min\bigl\{i\colon q_i\ne d_i,\ i=\overline{1,r}\bigr\}$; тогда

$$\bigl(L_{p,q_1,\ldots,q_s},L_{p,d_1,\ldots,d_s}\bigr)_{\theta,t} = L_{p,q_1,\ldots,q_{s-1},q_\theta,t},$$

где $0<\theta<1$, $\frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_s}+\frac{\theta}{d_s}$, $0<t\le\infty$.

4. Пусть $p_0\ne p_1$, $0<t\le\infty$; тогда

$$\bigl(L_{p_0,q_1,\ldots,q_s},L_{p_1,d_1,\ldots,d_s}\bigr)_{\theta,t} = L_{p,t},$$

где $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<r\le\infty$, $0<q\le\infty$, $\alpha=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$, $M=\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, $G_k = \bigl\{[-m,m]\cap\mathbb{Z}\colon m\ge k\bigr\}$, $\psi([-m,m]\cap\mathbb{Z})=m$, $m\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$L_{p,q}[0,1]\hookrightarrow N_\psi^{\alpha,q}(L_r[0,1],M)$$

и, следовательно, верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}\sup_{k\ge n}\frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{L_r}\right)^q \le c\|f\|_{L_{p,q}[0,1]}^q. \qquad (5)$$

Доказательство. Из неравенства (1) имеем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}\sup_{k\ge n}\frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{L_r}\le c\sup_{n\in\mathbb{N}}n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}\sup_{k\ge n}k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}-1}\|f\|_{L_p}=c\|f\|_{L_p},$$

т.е. $L_p[0,1]\hookrightarrow N_\psi^{\alpha,\infty}(L_r,M)$. Таким образом, для оператора вложения I верно

$$I\colon\ L_p[0,1]\to N_\psi^{\alpha,\infty}(L_r,M),$$

где параметры p, α, r связаны соотношением $\alpha=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$.

Пусть r — фиксированный параметр. Тогда найдутся p_0, p_1, α_0, α_1 такие, что $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r}$, $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}$ и, следовательно, верно

$$I\colon\ L_{p_0}[0,1] \to N_\psi^{\alpha_0,\infty}(L_r, M), \qquad I\colon\ L_{p_1}[0,1] \to N_\psi^{\alpha_1,\infty}(L_r, M).$$

Воспользуемся теоремой 1 и интерполяционными свойствами пространства Лебега [11]:

$$I\colon\ L_{p_\theta,q}[0,1] \to N_\psi^{\alpha_\theta,q}(L_r, M),$$

где $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $0 < \theta < 1$. Очевидно, найдется θ такое, что $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1}{p}$, но тогда

$$\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1-\theta)\left(1 - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r}\right) + \theta\left(1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r}\right) = 1 - \frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \alpha.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $1 < p < r < \infty$, $0 < q \le \infty$. Если $f \in L_{p,q}[0,1]$, то*

$$\|S_n(f)\|_{L_r} = o\big(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\big), \qquad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\Big(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|S_n(f)\|_{L_r}\Big)^q \le c\|f\|^q_{L_{p,q}[0,1]}. \tag{6}$$

Доказательство. Из неравенства (5) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\left(n^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}} \sup_{k\ge n} \frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{L_r}\right)^q.$$

Тогда имеет место соотношение (см. [12, с. 31])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(m^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}} \sup_{k\ge m} \frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{L_r}\right)^q = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(m^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}} \sup_{k\ge m} \frac{1}{k}\|S_k(f)\|_{L_r}\right)^q \ge \frac{1}{n^q}\|S_n(f)\|^q_{L_r} \sum_{m=1}^n m^{(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r})q} \ge c\big(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|S_n(f)\|_{L_r}\big)^q.$$

Следовательно, выполнено первое утверждение следствия, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|S_n(f)\|_{L_r} = 0.$$

Соотношение (6) есть очевидное следствие (5).

Следующая теорема показывает, что оценка (6) точна.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < r < \infty$, $1 \le q < \infty$. Тогда найдется функция $f \in L_{p,q}[0,1]$ такая, что*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\Big(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|S_n(f)\|_{L_r}\Big)^{q-\varepsilon} = \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f \sim \sum_{k=3}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}, \qquad \text{где} \qquad a_k = \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}(\ln k)^{\frac{1}{q}}(\ln\ln k)^2}, \quad k=3,4,\dots$$

По теореме Харди–Литтлвуда для пространства Лоренца [13, 4] имеем

$$\|f\|_{L_{p,q}}^q \sim \sum_{k=3}^{\infty} k^{\frac{q}{p'}-1} a_k^q = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\ln k(\ln\ln k)^{2q}} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|S_n(f)\|_{L_r}\Big)^{q-\varepsilon} \sim \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=3}^{n} m^{r-2}\Big(m^{\frac{1}{p'}}(\ln m)^{\frac{1}{q}}(\ln\ln m)^2\Big)^{-r}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{q-\varepsilon} \sim$$

$$\sim \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{q-\varepsilon}{q}}(\ln\ln n)^{2(q-\varepsilon)}} = \infty.$$

Теорема доказана.

Для приведенной в теореме 3 функции справедливо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|S_n(f)\|_{L_r}\Big)^{q} < \infty, \tag{7}$$

но $f \notin L_{p,q-\varepsilon}[0,1]$ для любого положительного ε. Более того, если рассматривать неравенство (6) в более тонкой шкале пространств Лоренца $L_{p,\bar q}[0,1]$, $\bar q = (q_1,\dots,q_n)$, то найдется функция f, для которой имеет место (7), но

$$f \notin L_{p,\underbrace{q,\dots,q-\varepsilon}_{s}}[0,1]$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Здесь следует рассмотреть функцию $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$ с коэффициентами

$$a_k(f) = \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}(\ln k)^{\frac{1}{q}}\dots(\underbrace{\ln\dots\ln}_{s} k)^{\frac{1}{q}}(\underbrace{\ln\dots\ln}_{s+1} k)^2}.$$

3. О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $L_{p,s}$-НОРМ СУММ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ИЗ $L_{p,q}$

В этом разделе исследуется случай, когда $(X,Y) = (L_{p,s}[0,1], L_{p,q}[0,1])$, $0 < s < q \le \infty$, $1 < p < \infty$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < r < p+1$, $0 < q \le \infty$, $f \in L_{p,q}[0,1]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|S_n(f)\|_{L_{r,q}} \le c_{p,q} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L_{p,q}},$$

где константа $c_{p,q}$ *зависит только от параметров* p, q.

Доказательство. Из неравенства (1) следует, что оператор $Tf = S_n(f)$ ограничен из $L_p[0,1]$ в $L_r[0,1]$ с нормой $\|T\| \le cn^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$. Пусть (p_0, r_0), (p_1, r_1) — пары чисел, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p} + \varepsilon, \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \varepsilon, \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} + \varepsilon, \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число такое, что $1 < r_0, r_1, p_0, p_1 < p+1$. Тогда $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, где $\theta = \frac{1}{2}$. Используя интерполяционную теорему Марцинкевича–Кальдерона [11], имеем

$$T\colon L_{p,q}[0,1] \to L_{r,q}[0,1]$$

с $\|T\| \le c_{p,q} n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{r_0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r_1}\right)} = c_{p,q} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$.

Лемма 2. *Пусть* $0 < s < q \le \infty$, $1 < p < r < \infty$, $f \in L_{p,q}[0,1]^n$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\|f\|_{L_{p,s}[0,1]^n} \le c\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L_{r,q}[0,1]^n},$$

где константа c зависит только от s и q.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{s} - \frac{1}{q}$. Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\|f\|_{L_{p,s}} = \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{r}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\right)^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}} =$$

$$= \tau^{-\frac{1}{\tau}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{\tau}} \|f\|_{L_{r,q}} = c_{s,q}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L_{r,q}}.$$

Лемма 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < s < q \le \infty$, $f \in L_{p,q}[0,1]$. *Тогда*

$$\|S_m(f)\|_{L_{p,s}} \le c(\ln m)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_{p,q}},$$

где c — некоторая константа, зависящая только от p, q, s.

Доказательство. Пусть параметр r такой, что $1 < p < r < p+1$. Тогда из лемм 1 и 2 имеем

$$\|S_m(f)\|_{L_{p,s}} \le c_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)} \|S_m(f)\|_{L_{r,q}} \le c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)} m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L_{p,q}}.$$

При этом параметр r можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\ln m}$; тогда

$$\|S_m(f)\|_{L_{p,s}} \le c_2 (\ln m)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} m^{\frac{1}{\ln m}} \|f\|_{L_{p,q}} = c_2 e (\ln m)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \|f\|_{p,q}.$$

Лемма доказана.

Мы привели новое доказательство неравенства (2). Эта методика применима и в случае кратных рядов Фурье, когда спектр суммы Фурье — либо ступенчатый гиперболический крест, либо n-мерный параллелепипед.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < s < q \le \infty$, $\alpha = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{q} > 0$, $f \in L_{p,q}[0,1]$. *Тогда*

$$\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k \ln k}\left((\ln k)^\alpha \sup_{m \ge k} \frac{1}{\ln m} \|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q \le c_{p,q,s} \|f\|^q_{L_{p,q}},$$

$$\|S_m(f)\|_{L_{p,s}} = o\Big((\ln m)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\Big), \qquad m \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $N_\psi^{\alpha,q}(L_{p,s},M)$, где $M=\{G_k\}_{k=1}^\infty$ и $G_k = \{[-2^m,2^m]\cap\mathbb{Z}\colon\ m\ \ge\ k\}$, а функция множеств ψ определяется следующим образом: $\psi([-2^m,2^m])=m$.

Для норм пространств $N_\psi^{\alpha,q}(L_{p,s},M)$, $N_\psi^{\alpha,\infty}(L_{p,s},M)$ можно записать соотношения

$$\|f\|_{N_\psi^{\alpha,q}(L_{p,s},M)} = \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\left(n^\alpha \sup_{m\ge n}\frac{1}{m}\|S_{2^m}(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\left(n^\alpha \sup_{m\ge 2^n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{N_\psi^{\alpha,\infty}(L_{p,s},M)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \sup_{m\ge n}\frac{1}{m}\|S_{2^m}(f)\|_{L_{p,s}} \sim \sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \sup_{m\ge 2^n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}.$$

Эти соотношения являются следствиями теоремы об ограниченности частичных сумм Фурье в пространстве Лоренца при $1<p<\infty$.

Из леммы 3 следует

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \sup_{m\ge 2^n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{p,s} \le c\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \sup_{m\ge 2^n}\frac{(\ln m)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}}{\ln m}\|f\|_{p,q} \le$$

$$\le c\sup_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \frac{1}{(\ln 2^n)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}}}\|f\|_{p,q} = c\|f\|_{p,q},$$

т.е. оператор вложения I ограничен из $L_{p,q}[0,1]$ в $N_\psi^{\alpha,\infty}(L_{p,s}[0,1],M)$.

Таким образом, при $0<q_0<q<q_1\le\infty$, $\alpha_0=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q_0}$, $\alpha_1=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q_1}$ имеем

$$I\colon\ L_{p,q_0}\to N_\psi^{\alpha_0,\infty}(L_{p,s},M), \qquad I\colon\ L_{p,q_1}\to N_\psi^{\alpha_1,\infty}(L_{p,s},M).$$

Тогда

$$I\colon (L_{p,q_0},L_{p,q_1})_{\theta,q} \to \bigl(N_\psi^{\alpha_0,\infty}(L_{p,s},M), N_\psi^{\alpha_1,\infty}(L_{p,s},M)\bigr)_{\theta,q},$$

где $\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$. Из интерполяционной теоремы 1 и интерполяционных свойств пространств Лоренца получим

$$L_{p,q}[0,1]\hookrightarrow N_\psi^{\alpha,q}(L_{p,s},M).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\left(k^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}} \sup_{m\ge 2^k}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q \le c\|f\|_{L_{p,q}}^q. \tag{8}$$

С другой стороны, для монотонно неубывающей последовательности $\{b_k\}$ имеем

$$\sum_{k=4}^\infty \frac{\bigl((\ln k)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}} b_k\bigr)^q}{k\ln k} = \sum_{k=2}^\infty \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{\bigl((\ln m)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}} b_m\bigr)^q}{m\ln m} \le$$

$$\le \sum_{k=2}^\infty \frac{(k+1)^{(1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q})q} b_{2^{k+1}}^q}{k} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{m} \le c\sum_{k=1}^\infty \frac{\bigl(k^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}} b_{2^k}\bigr)^q}{k}.$$

Поэтому из (8) следует первое утверждение теоремы. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\left((\ln n)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\sup_{m>n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q$$

сходится и

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{2k}\frac{1}{n\ln n}\left((\ln n)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\sup_{m>n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q=0.$$

Но

$$\sum_{n=k}^{2k}\frac{1}{n\ln n}\left((\ln n)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\sup_{m>n}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^q\geq\|S_{2k}(f)\|_{L_{p,s}}^q\sum_{n=k}^{2k}\frac{(\ln n)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s}\right)^q}}{n\ln n}\geq$$

$$\geq c\|S_{2k}(f)\|_{L_{p,s}}^q(\ln 2k)^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s}\right)^q},$$

где константа c зависит от параметров p, q, s.

Следовательно, для $f\in L_{p,q}[0,1]$ верно

$$\lim_{k\to\infty}(\ln k)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\|S_k(f)\|_{L_{p,s}}=0.$$

Теорема 5. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<s<q\leq\infty$, $1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}\geq 0$, $0<\tau\leq\infty$, $L_{p,q,\tau}[0,1]$ — *трехпараметрическое пространство Лоренца. Тогда для* $f\in L_{p,q,\tau}[0,1]$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}\left((\ln k)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}}\sup_{m\geq k}\frac{1}{\ln m}\|S_m(f)\|_{L_{p,s}}\right)^\tau\leq c\|f\|_{L_{p,q,\tau}}^\tau.$$

Доказательство, как и в теореме 4, опирается на неравенство из леммы 3, только в соответствующем месте надо применить интерполяционную теорему для пространства Лоренца [14]:

$$(L_{r,q_0},L_{r,q_1})_{\theta,\tau}=L_{r,q_\theta,\tau},$$

где $\frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$, $0<\theta<1$.

4. АНИЗОТРОПНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

В этом разделе приводятся определение анизотропного пространства Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^*}[0,1]^n$, интерполяционные теоремы, а также неравенства, связывающие свойства суммируемости коэффициентов Фурье по тригонометрической системе и $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^*}[0,1]^n$-нормы соответствующих функций. Утверждения являются некоторыми модификациями результатов работ [2–4] и доказываются по той же схеме. Поэтому они приведены без доказательств и сформулированы в виде лемм.

Пусть $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_j=0$ или 1, $j=1,\dots,n\}$ — вершины n-мерного единичного куба в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}=\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$ — семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon\in E}A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(t,a;A_\varepsilon,\varepsilon\in E)=\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon\in E}t^\varepsilon\|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

где $t^\varepsilon=t_1^{\varepsilon_1}\dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$. Для произвольной перестановки $\star = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ последовательности $(1, 2, \dots, n)$ и $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \le \boldsymbol{\infty}$ определим $\mathbf{q}^\star = \binom{j_1, j_2, \dots, j_n}{q_1, q_2, \dots, q_n}$.

Через $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star}} = \left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\infty}} \left(t^{-\boldsymbol{\theta}} K(t, a; \mathbf{A}) \right)^{\mathbf{q}^\star} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\mathbf{q}^\star}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \dots \left(\int\limits_0^\infty \left(t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n} K(t, a; A_\varepsilon, \varepsilon \in E) \right)^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{\frac{q_{j_2}}{q_{j_1}}} \dots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}} < \infty.$$

Здесь и в дальнейшем используется сокращенная запись, где параметр $\mathbf{q}^\star = \binom{j_1, j_2, \dots, j_n}{q_1, q_2, \dots, q_n}$ определяет порядок смешанной нормы относительно фиксированной нумерации переменных $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Лемма 4. *Пусть $\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} \le \boldsymbol{\infty}$, $\star = (j_1, \dots, j_n)$ — некоторая перестановка последовательности $(1, \dots, n)$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $\mathbf{B} = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ — два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $M_0 = (M_0^1, \dots, M_0^n)$, $M_1 = (M_1^1, \dots, M_1^n)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T\colon A_\varepsilon \to B_\varepsilon$ с оценкой нормы $\|T\|_{A_\varepsilon \to B_\varepsilon} \le c_\varepsilon \prod_{i=1}^n M_{\varepsilon_i}^i$ для любого $\varepsilon \in E$, то*

$$T\colon \mathbf{A}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star} \to \mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star}$$

с нормой $\|T\|_{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star} \to \mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star}} \le (\max_{\varepsilon \in E} c_\varepsilon) \prod_{i=1}^n (M_0^i)^{1-\theta_i} (M_1^i)^{\theta_i}$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — такие векторы, что если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если же $q_j = \infty$, то $0 < p_j \le \infty$, $j = 1, \dots, n$. В дальнейшем будем считать, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют этим условиям.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — измеримая функция, заданная в $[0,1]^n$. Через $f^*(t) = f^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$ при фиксированных остальных переменных. Данную функцию будем называть невозрастающей перестановкой функции f в $[0,1]^n$.

Пространство $L_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^\star}[0,1]^n$ определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^\star}[0,1]^n} = \left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left(t^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}} f^*(t) \right)^{\mathbf{q}^\star} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\mathbf{q}^\star}} < \infty.$$

Лемма 5. *Пусть $\mathbf{1} \le \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \le \boldsymbol{\infty}$, $\varepsilon \in E$, $\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n})$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r, \dots, r) \le \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \le \boldsymbol{\infty}$, $\star = (j_1, \dots, j_n)$ — перестановка последовательности $(1, 2, \dots, n)$, $\mathbf{q}^\star = \binom{j_1, j_2, \dots, j_n}{q_1, q_2, \dots, q_n}$. Тогда*

$$(L_{\mathbf{p}_\varepsilon, \mathbf{r}}[0,1]^n; \varepsilon \in E)_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star} = L_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^\star}[0,1]^n, \tag{9}$$

где $\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})/\mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\theta}/\mathbf{p}_1$.

Следствие 2. *Пусть параметры $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\star$, $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{p}$ удовлетворяют условиям леммы 5. Если для семейства пространств $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ имеют место соотношения*

$$L_{\mathbf{p}_\varepsilon, \mathbf{r}}[0,1]^n \hookrightarrow A_\varepsilon \hookrightarrow L_{\mathbf{p}_\varepsilon, \boldsymbol{\infty}}[0,1]^n, \qquad \varepsilon \in E,$$

то

$$(A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}^\star} = L_{\mathbf{p}, \mathbf{q}^\star}[0,1]^n.$$

Замечание 1. Учитывая, что для произвольной перестановки $\star = (j_1, \dots, j_n)$ при $\mathbf{r} = (r, \dots, r) < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ верны вложения

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{r}}[0,1]^n \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\boldsymbol{\infty}}[0,1]^n,$$

можно утверждать, что лемма 5 применима для общих анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n$ и пространств Лебега $L_{\mathbf{p}}[0,1]^n$ со смешанной нормой.

Пусть $\mathfrak{N}$ — семейство всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^n$. Систему множеств $M = \{G_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$ назовем сетью в $\mathbb{Z}^n$, если она удовлетворяет условиям $G_k \subset \mathfrak{N}$, $G_k \supset G_m$ при $k \le m$ (т.е. $k_i \le m_i$, $i = 1, \dots, n$).

Пусть $\mathbf{X}$ — линейное нормированное пространство, вложенное в $L_1[0,1]^n$. Через $N_\psi^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}^\star}(\mathbf{X}, M)$ обозначим множество функций $f \in L_1[0,1]^n$, $f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{N_\psi^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}^\star}(\mathbf{X},M)} = \left(\sum_{k=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{\infty}} \left(k^{\boldsymbol{\alpha}} \sup_{e\in G_k} \frac{1}{\psi(e)} \left\|\sum_{m\in e} a_m e^{2\pi i m x}\right\|_{\mathbf{X}}\right)^{\mathbf{q}^\star} \frac{1}{k}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^\star}} < \infty;$$

здесь и далее $kx = \sum_{i=1}^n x_i k_i$.

Лемма 6. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \boldsymbol{\alpha}_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\star = (j_1, \dots, j_n)$ — *перестановка* $(1, \dots, n)$, $\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon = (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_n^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon \in E$, $\mathbf{0} \le \mathbf{q} \le \boldsymbol{\infty}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha}_1$. *Тогда*

$$\left(N_\psi^{\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon,\boldsymbol{\infty}}(\mathbf{X}, M), \varepsilon \in E\right)_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{q}^\star} \hookrightarrow N_\psi^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}^\star}(\mathbf{X}, M). \tag{10}$$

Замечание 2. Соотношения (9), (10) понимаются в смысле эквивалентности норм с константами вида

$$c\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_0^i} - \frac{1}{p_1^i}\right)^{-1} \sum_{\varepsilon\in E} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1-\theta_i)^{1-\varepsilon_i}\theta_i^{\varepsilon_i}},$$

где c — абсолютная константа.

Определим пространство последовательностей

$$n_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star} = \left\{\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \colon \|a\|_{n_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}} = \left(\sum_{k=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{\infty}} \left(k^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}} \overline{a}_k\right)^{\mathbf{q}^\star} \frac{1}{k}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^\star}} < \infty\right\},$$

где

$$\overline{a}_{k_1\dots k_n} = \sup_{\substack{m_i \ge |k_i| \\ i=\overline{1,n}}} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_n} \left|\sum_{r_n=-m_n}^{m_n} \dots \sum_{r_1=-m_1}^{m_1} a_{r_1\dots r_n}\right|,$$

$m_i \in \mathbb{Z}_+$, $\overline{m}_i = \max\{1, m_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Лемма 7. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}-\mathbf{1}}$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} \le \boldsymbol{\infty}$, $\star = (j_1, \dots, j_n)$ — *произвольная перестановка последовательности* $(1, 2, \dots, n)$. *Если* $f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$, *то верно неравенство*

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}',\mathbf{q}^\star}} \le c_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star} \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n}.$$

5. НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК И СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ КРЕСТАМ

Пусть $s \in \mathbb{N}^n$,

$$Q_s = \{k \in \mathbb{Z}^n\colon\ 0 \le |k_j| \le 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Назовем множество

$$\Lambda_m = \bigcup_{s_1+\ldots+s_n=m} Q_s$$

ступенчатым гиперболическим крестом, а множество

$$\Gamma_N = \left\{k \in \mathbb{Z}^n\colon\ \bar{k} = \prod_{j=1}^{n} \max(|k_j|, 1) \le N\right\}$$

гиперболическим крестом.

Пусть $T_{\Gamma_N}(x) = \sum_{k\in\Gamma_N} c_k e^{2\pi ikx}$, $T_{\Lambda_m}(x) = \sum_{k\in\Lambda_m} c_k e^{2\pi ikx}$ — тригонометрические многочлены, соответствующие гиперболическому кресту Γ_N и ступенчатому гиперболическому кресту Λ_m.

Если $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, то через $T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}$ и $T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Lambda_m}$ обозначим соответственно тригонометрические полиномы $\sum_{k\in\Gamma_N} c_k \bar{k}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{2\pi ikx}$, $\sum_{k\in\Lambda_m} c_k \bar{k}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{2\pi ikx}$, где $\bar{k}^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{j=1}^{n}(\max(|k_j|, 1))^{\alpha_j}$.

Теорема 6. *Пусть* $N, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \le \boldsymbol{\infty}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = \max_{1\le j\le n}\bigl(\alpha_j + \frac{1}{p_j}\bigr)$, $\star = (j_1, \ldots, j_n)$ — *некоторая перестановка последовательности* $(1, 2, \ldots, n)$, $A = \bigl\{j\colon \alpha_j + \frac{1}{p_j} = \beta\bigr\}$, $k_0 = \min\{k\colon j_k \in A\}$.

Если $\beta > 0$, *то*

$$\|T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}\|_{L_\infty} \le c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} N^{\beta} (\ln(N+2))^{\left(\sum_{j\in A} \frac{1}{q'_j}\right) - \frac{1}{q'_{j_{k_0}}}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}.$$

Если $\beta = 0$, *то*

$$\|T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}\|_{L_\infty} \le c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} (\ln(N+2))^{\sum_{j\in A} \frac{1}{q'_j}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}.$$

Доказательство. Заметим, что полином $T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}$ можно представить как свертку $T_{\Gamma_N} * U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}$, где ядро $U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}$ имеет вид

$$U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}(x) = \sum_{m\in\Gamma_N} \overline{m}^{\boldsymbol{\alpha}} e^{2\pi imx}.$$

Тогда из неравенства Гёльдера для пространств $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n$ следует

$$\|T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}\|_\infty \le c\|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}} \|U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_n}\|_{L_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'^\star}}.$$

Воспользуемся представлением нормы пространства $L_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'^\star}[0,1]^n$, доказательство которого аналогично доказательству соответствующего факта для пространств Лебега со смешанной нормой [15]:

$$\|U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'^\star}} \sim \sup_{\|g\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}=1} \int\limits_{[0,1]^n} U^{\boldsymbol{\alpha}}_{\Gamma_N}(x)\overline{g(x)}\,dx = \sup_{\|g\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}=1} \sum_{m\in\Gamma_n} \overline{m}^{\boldsymbol{\alpha}}\,\overline{b_m}.$$

Для $\varepsilon \in E$ определим разность

$$\Delta_\varepsilon d_k = \Delta_{\varepsilon_n}(\ldots(\Delta_{\varepsilon_1} d_{k_1\ldots k_n})\ldots),$$

где $\Delta_{\varepsilon_i} d_{k_1\ldots k_n} = d_{k_1\ldots k_i\ldots k_n} - \varepsilon_i d_{k_1\ldots k_i+1\ldots k_n}$.

Применим преобразование Абеля

$$\left|\sum_{m\in\Gamma_N,\ m\ge 0}\overline{m}^{\boldsymbol\alpha}\,\overline{b_m}\right| = \left|\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{k_{j_n}=(1-\varepsilon_{j_n})N_n}^{N_n-\varepsilon_{j_n}}\dots\sum_{k_{j_1}=(1-\varepsilon_{j_1})N_1}^{N_1-\varepsilon_{j_1}}\Delta_\varepsilon\bar k^{\boldsymbol\alpha}\overline{\left(\sum_{0\le m\le k} b_m\right)}\right| \le$$

$$\le c_1\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{k_{j_n}=(1-\varepsilon_{j_n})N_n}^{N_n-\varepsilon_{j_n}}\dots\sum_{k_{j_1}=(1-\varepsilon_{j_1})N_1}^{N_1-\varepsilon_{j_1}}\bar k^{\boldsymbol\alpha-\varepsilon}\left|\sum_{0\le m\le k} b_m\right| = c_1\sum_{\varepsilon\in E} I_\varepsilon;$$

здесь $N_1=\left[\frac{N}{k_{j_2}\dots k_{j_n}}\right]$, $N_2=\left[\frac{N}{k_{j_3}\dots k_{j_n}}\right]$, $\dots$, $N_n=N$.

Пусть $\mathbf N=(N_1,\dots,N_n)$, $\mathbf q^\star_\varepsilon=\begin{pmatrix} j_1, j_2,\dots, j_n\\ \frac{q_1}{\varepsilon_1},\frac{q_2}{\varepsilon_2},\dots,\frac{q_n}{\varepsilon_n}\end{pmatrix}$, при $\varepsilon_i=0$ будем полагать $\frac{q_i}{\varepsilon_i}=\infty$. Используем неравенство Гёльдера в векторной форме

$$I_\varepsilon=\sum_{k=(1-\varepsilon)\mathbf N}^{\mathbf N-\varepsilon}\left(\bar k^{\frac{1}{\mathbf p'}-\frac{\varepsilon}{\mathbf q^\star_\varepsilon}}\left|\frac{1}{\bar k}\sum_{0\le m\le k} b_m\right|\right)\left(\bar k^{\boldsymbol\alpha+\frac{1}{\mathbf p}-\frac{\varepsilon}{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}}\right)\le$$

$$\le\left(\sum_{k=(1-\varepsilon)\mathbf N}^{\mathbf N-\varepsilon}\left(\bar k^{\frac{1}{\mathbf p'}-\frac{\varepsilon}{\mathbf q^\star_\varepsilon}}\left|\frac{1}{\bar k}\sum_{0\le m\le k} b_m\right|\right)^{\mathbf q^\star_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mathbf q^\star_\varepsilon}}\left(\sum_{k=(1-\varepsilon)\mathbf N}^{\mathbf N-\varepsilon}\left(k^{\boldsymbol\alpha+\frac{1}{\mathbf p}-\frac{\varepsilon}{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}}\right)^{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}}\le$$

$$\le\left(\sum_{k\in\mathbb Z^n_+}\left(\bar k^{\frac{1}{\mathbf p'}}\left|\frac{1}{\bar k}\sum_{0\le m\le k} b_m\right|\right)^{\mathbf q^\star_\varepsilon}\frac{1}{\bar k}\right)^{\frac{1}{\mathbf q^\star_\varepsilon}}\left(\sum_{k=(1-\varepsilon)\mathbf N}^{\mathbf N-\varepsilon}\left(k^{\boldsymbol\alpha+\frac{1}{\mathbf p}-\frac{\varepsilon}{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}}\right)^{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mathbf q^{\star\prime}_\varepsilon}}=A_\varepsilon\cdot B_\varepsilon.$$

Так как $\mathbf q_\varepsilon\ge\mathbf q$ для произвольного $\varepsilon\in E$, по лемме 7 имеем

$$A_\varepsilon\le\|b\|_{n_{\mathbf p',\mathbf q^\star_\varepsilon}}\le c_2\|b\|_{n_{\mathbf p',\mathbf q^\star}}\le c_3\|g\|_{L_{\mathbf p,\mathbf q^\star}}. \tag{11}$$

Заметим, что при $\varepsilon_{j_i}=0$

$$\left(\sum_{k=(1-\varepsilon_{j_i})N_i}^{N_i-\varepsilon_{j_i}}\left(\bar k^\beta\right)^{\frac{q'_{j_i}}{\varepsilon_{j_i}}}\frac{1}{\bar k^{\varepsilon_{j_i}}}\right)^{\frac{\varepsilon_{j_i}}{q'_{j_i}}}=N_i^\beta\sim\left(\sum_{k=1}^{N_i-1}\left(k^\beta\right)^{q'_{j_i}}\frac1k\right)^{\frac{1}{q'_{j_i}}}$$

и при $\varepsilon_{j_i}=1$

$$\left(\sum_{k=(1-\varepsilon_{j_i})N_i}^{N_i-\varepsilon_{j_i}}\left(\bar k^\beta\right)^{\frac{q'_{j_i}}{\varepsilon_{j_i}}}\frac{1}{\bar k^{\varepsilon_{j_i}}}\right)^{\frac{\varepsilon_{j_i}}{q'_{j_i}}}\le 2\left(\sum_{k=1}^{N_i-1}\left(k^\beta\right)^{q'_{j_i}}\frac1k\right)^{\frac{1}{q'_{j_i}}}.$$

Поэтому число B_ε для произвольного $\varepsilon\in E$ оценивается величиной

$$c_4\left(\sum_{k_{j_n}=1}^{N}\dots\left(\sum_{k_{j_1}=1}^{[N/\prod_{s=2}^n k_{j_s}]-1}\left(\prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i+\frac{1}{p_i}}\right)^{q'_{j_1}}\frac{1}{k_{j_1}}\right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}}\dots\right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Следовательно, с учетом (11) получим

$$\|U^{\boldsymbol\alpha}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf p',\mathbf q'^\star}}\le c_5\left(\sum_{k_{j_n}=1}^{N}\dots\left(\sum_{k_{j_1}=1}^{[N/\prod_{s=2}^n k_{j_s}]-1}\left(\prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i+\frac{1}{p_i}}\right)^{q'_{j_1}}\frac{1}{k_{j_1}}\right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}}\dots\right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Подсчетом правой части последнего выражения при $\beta = \max_{1\le j\le n}\bigl(\alpha_j + \frac{1}{p_j}\bigr) > 0$ приходим к оценке

$$\|U^{\boldsymbol\alpha}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'^\star}} \le c_6 N^{\beta}(\ln(N+2))^{\left(\sum_{j\in A}\frac{1}{q'_j}\right)-\frac{1}{q'_{j_{k_0}}}},$$

а при $\beta = 0$ имеем

$$\|U^{\boldsymbol\alpha}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'^\star}} \le c_7(\ln(N+2))^{\sum_{j\in A}\frac{1}{q'_j}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть* $1 < p \le r < \infty$, $0 < q \le \infty$. *Если* $f \in L_{p,q}[0,1]^n$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(2^{k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)}\|S_{\Lambda_k}(f)\|_{L_r}\Bigr)^q \le c\|f\|^q_{L_{p,q}},$$

где константа c зависит от параметра p и размерности n.

Доказательство. Пусть $\alpha = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, $M = \{G_k\}_{k\in\mathbb N}$ — сеть, где $G_k = \{\Lambda_m\}_{2^m\ge k}$ — семейство гиперболических крестов. Пусть $\psi\colon G_1 \to \mathbb N$ и $\psi(\Lambda_m) = 2^m$. Тогда нормы пространств $N^{\alpha,q}_{\psi}(L_r,M)$ и $N^{\alpha,\infty}_{\psi}(L_r,M)$ имеют вид

$$\|f\|^q_{N^{\alpha,q}_{\psi}(L_r,M)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Bigl(k^{\alpha}\sup_{2^m\ge k}\frac{1}{2^m}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r}\Bigr)^q \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(2^{k\alpha}\sup_{m\ge k}\frac{1}{2^m}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r}\Bigr)^q,$$

$$\|f\|_{N^{\alpha,\infty}_{\psi}(L_r,M)} = \sup_{k\in\mathbb N}k^{\alpha}\sup_{2^m\ge k}\frac{1}{2^m}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r} \sim \sup_{k\in\mathbb N}2^{k\alpha}\sup_{m\ge k}\frac{1}{2^m}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r}.$$

Из неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов со спектром из ступенчатого гиперболического креста Λ_m и ограниченности оператора суммы Фурье $S_{\Lambda_m}(f)$ в $L_p[0,1]^n$ при $1 < p < \infty$ [10] имеем

$$\|f\|_{N^{\alpha,\infty}_{\psi}(L_r,M)} \sim \sup_{k\in\mathbb N}2^{k\alpha}\sup_{m\ge k}\frac{1}{2^m}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r} \le c\sup_{k\in\mathbb N}2^{k\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)}\sup_{m\ge k}\frac{1}{2^{m\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)}}\|f\|_{L_p} = c\|f\|_{L_p},$$

т.е. оператор вложения I ограничен из L_p в $N^{\alpha,\infty}_{\psi}(L_r,M)$. Проведем уже знакомую процедуру, что и в теореме 2, с использованием интерполяционной теоремы 1 и получим нужное утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < s < q \le \infty$. *Если* $f \in L_{p,q}[0,1]^n$, *то*

$$\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_{p,s}} \le cm^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L_{p,q}} \tag{12}$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Bigl(m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_{p,s}}\Bigr)^q \le c\|f\|^q_{L_{p,q}}, \tag{13}$$

где константа c зависит от параметров p, q, s.

Доказательство. Из неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов и ограниченности оператора частичной суммы Фурье со спектром из ступенчатого гиперболического креста имеем

$$\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_r} \le c\cdot 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)m}\|f\|_{L_p},$$

где константа c зависит только от параметра p и размерности n.

Применяя интерполяционную теорему для пространств Лоренца [11], получим

$$\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_{r,q}} \le c \cdot 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)m}\|f\|_{L_{p,q}},$$

где c зависит от p, q и размерности n. Воспользовавшись леммой 2, получим

$$\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_{p,s}} \le c\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)^{-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)} \cdot 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)m}\|f\|_{L_{p,q}}.$$

Пусть теперь $\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=\frac{1}{m}$, тогда

$$\|S_{\Lambda_m}(f)\|_{L_{p,s}} \le c_1 m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L_{p,q}}.$$

Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим пространство $N_{\psi}^{\alpha,q}(L_{p,s},M)$, где $M=\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — сеть с $G_k=\{\Lambda_m\}_{m\ge k}$, $\psi(\Lambda_m)=m$. Тогда из соотношения (12) имеем вложение

$$L_{p,q}[0,1] \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,\infty}(L_{p,s},M)$$

при $\alpha = 1-\frac{1}{s}+\frac{1}{q}$. Теперь, используя интерполяционную теорему 1 и интерполяционные свойства пространств Лоренца $L_{p,q}[0,1]^n$, получим

$$L_{p,q}[0,1]^n \hookrightarrow N_{\psi}^{\alpha,q}(L_{p,s},M),$$

т.е. верно

$$\|f\|_{N_{\psi}^{\alpha,q}(L_{p,s},M)} \le c\|f\|_{L_{p,q}},$$

откуда немедленно следует (13).

6. СВОЙСТВА НОРМ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ

Пусть $m\in\mathbb{N}^n$, $f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_k e^{2\pi ikx}$. Прямоугольную сумму Фурье $S_m(f;x)$ для функции f определим следующим образом:

$$S_m(f;x)=\sum_{k_n=-m_n}^{m_n}\dots\sum_{k_1=-m_1}^{m_1}a_k e^{2\pi ikx}.$$

Теорема 9. *Пусть* $\star=(j_1,\dots,j_n)$ *— перестановка последовательности* $(1,\dots,n)$, $\mathbf{1}<\mathbf{p}\le\mathbf{r}<\boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{0}<\mathbf{q}\le\boldsymbol{\infty}$. *Если* $f\in L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n$, *то имеет место неравенство*

$$\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{r},\mathbf{q}^\star}} \le c\prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}, \tag{14}$$

где c зависит только от параметров $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Если $\mathbf{1}<\mathbf{p}\le\mathbf{r}\le\mathbf{p}+\mathbf{1}<\boldsymbol{\infty}$, *то константа в неравенстве* (14) *зависит только от* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Доказательство. Из условия теоремы векторы $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}$ и $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$ принадлежат открытому параллелепипеду $(0,1)^n$. Следовательно, существует параллелепипед $Q_d(\mathbf{0})$ с центром в нуле такой, что $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}\big)\subset(0,1)^n$, $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\big)\subset(0,1)^n$; здесь сторона d зависит только от параметров $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$. Отметим, что для вершин $\big\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_\varepsilon}\big\}_{\varepsilon\in E}$ и $\big\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}_\varepsilon}\big\}_{\varepsilon\in E}$ параллелепипедов $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}\big)$, $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\big)$ имеет место равенство

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_\varepsilon}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}_\varepsilon}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}, \qquad \varepsilon\in E.$$

Из неравенства разных метрик С.М. Никольского для пространств Лебега со смешанной метрикой и для тригонометрических многочленов T_m имеет место

$$\|T_m\|_{L_{\mathbf{r}_\varepsilon}} \le c\prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{(p\varepsilon)_i}-\frac{1}{(r\varepsilon)_i}}\|T_m\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}} = c\prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\|T_m\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}}, \qquad \varepsilon\in E,$$

где c — абсолютная константа.

Воспользуемся теоремой об ограниченности частичных сумм в пространстве Лебега со смешанной метрикой:

$$\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{r}_\varepsilon}} \le c_{\mathbf{p}}\prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\|f\|_{L_{\mathbf{p}_\varepsilon}}, \qquad \varepsilon\in E.$$

Для оператора $S_m(f)$ применим леммы 4–6 и замечание 1:

$$\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{r},\mathbf{q}^\star}} \le c\prod_{i=1}^{n} m_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}.$$

Учитывая замечание 2 и то, что $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}$ и $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}$ — центры параллелепипедов $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}\big)$, $Q_d\big(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\big)$, получим утверждение теоремы о константе c в неравенстве (14) при $\mathbf{1}<\mathbf{p}\le\mathbf{r}\le\mathbf{p}+\mathbf{1}$.

Теорема 10. *Пусть* $\star=(j_1,\dots,j_n)$ — *перестановка последовательности* $(1,\dots,n)$, $\mathbf{1}<\mathbf{p}<\boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{1}\le\mathbf{q}_1\le\mathbf{q}_2\le\boldsymbol{\infty}$. *Если* $f\in L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_2^\star}[0,1]^n$, *то верно*

$$\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_1^\star}} \le c\prod_{q_i^1<q_i^2}(\ln(m_i+1))^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}}\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_2^\star}}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть параметр $\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_n)$ такой, что $r_i>p_i$ при $q_i^1<q_i^2$ и $r_i=p_i$ при $q_i^1=q_i^2$. Для произвольной функции $f\in L_{\mathbf{r},\mathbf{q}_2^\star}$ имеем

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_1^\star}} = \left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\Big(t^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}}f^*(t)\Big)^{\mathbf{q}_1^\star}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}_1^\star}} = \left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\Big(t^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}t^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}f^*(t)\Big)^{\mathbf{q}_1^\star}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}_1^\star}} \le$$

$$\le\left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\Big(t^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}}f^*(t)\Big)^{\mathbf{q}_2^\star}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}_2^\star}}\prod_{q_i^1<q_i^2}\left(\int\limits_0^1 t_i^{(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i})\tau_i}\frac{dt_i}{t_i}\right)^{\frac{1}{\tau_i}}.$$

Здесь применили неравенство Гёльдера по тем переменным t_i, для которых $q_i^1<q_i^2$, и $\frac{1}{\tau_i}=\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}$. Вычислив интеграл, получим

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_1^\star}} \le \prod_{q_i^1<q_i^2}\left(\frac{1}{\big(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}\big)\big(\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}\big)}\right)^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}}\|f\|_{L_{\mathbf{r},\mathbf{q}_2^\star}}. \tag{16}$$

Пусть $m\in\mathbb{N}^n$, $m_i>e^{p_i}$. Для тех индексов i, для которых $q_i^1<q_i^2$, положим $\frac{1}{r_i}=\frac{1}{p_i}-\frac{1}{\ln m_i}$.

Тогда из неравенств (16) и (14) имеем

$$\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_1^\star}} \le c_1 \prod_{q_i^1<q_i^2} \left(\frac{1}{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\right)^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}} \|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{r},\mathbf{q}_2^\star}} \le$$

$$\le c_2 \prod_{q_i^1<q_i^2} \left(\frac{1}{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}}\right)^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}} m_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}} \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_2^\star}} \le$$

$$\le c_2 e^n \prod_{q_i^1<q_i^2} (\ln m_i)^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}} \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_2^\star}} = c \prod_{q_i^1<q_i^2} (\ln m_i)^{\frac{1}{q_i^1}-\frac{1}{q_i^2}} \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}_2^\star}},$$

что и требовалось доказать.

В случае $\mathbf{p} = \mathbf{q}_2 = (p,\dots,p)$, $\star = (1,2,\dots,n)$ неравенство (15) с использованием других подходов приведено в работе [16].

Теорема 11. *Пусть* $\star = (j_1,\dots,j_n)$ — *перестановка* $(1,\dots,n)$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \boldsymbol{\infty}$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} \le \boldsymbol{\infty}$, $f \in L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}[0,1]^n$.

Если $\mathbf{p} < \mathbf{r}$, *то*

$$\left(\sum_{\mathbf{1}\le k<\boldsymbol{\infty}} \frac{1}{k}\left(k^{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}} \sup_{m\ge k} \frac{1}{m}\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{r}}}\right)^{\mathbf{q}^\star}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^\star}} \le c\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}.$$

Если $\mathbf{s} < \mathbf{q}$, *то*

$$\left(\sum_{\mathbf{3}\le k\le\boldsymbol{\infty}} \frac{1}{k\ln k}\left((\ln k)^{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}} \sup_{m\ge k} \frac{1}{m}\|S_m(f)\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{s}}}\right)^{\mathbf{q}^\star}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^\star}} \le c\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}}.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в одномерном случае, с той лишь разницей, что используются интерполяционные свойства анизотропных пространств $N_\psi^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}}(\mathbf{X},M)$ и пространств Лоренца $L_{\mathbf{p},\mathbf{q}^\star}$ относительно анизотропного интерполяционного метода, т.е. результаты разд. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blozinski A.P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263, N 1. P. 149–167.
2. *Нурсултанов Е.Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Мат. сб. 1998. Т. 189, №3. С. 83–102.
3. *Нурсултанов Е.Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, №1. С. 95–122.
4. *Нурсултанов Е.Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // ДАН. 2004. Т. 394, №1. С. 22–25.
5. *Neder L.* Über Koeffizientensumme einer beschrankten Potenzreihe // Math. Ztschr. 1921. Bd. 11. S. 115–123.
6. *Busko E.* Fonctions continues et fonctions bornees non adherentes dans $L^\infty(T)$ à la suite de leurs sommes partielles de Fourier // Stud. math. 1970. V. 34. P. 319–337.
7. *Осколков К.И.* Оценка приближения непрерывных функций подпоследовательностями сумм Фурье // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 240–253.
8. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
9. *Шерстнева Л.А.* Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1984. №4. С. 75–79.

10. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной. М.: Наука, 1986. 112 с. (Тр. МИАН; Т. 178).
11. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства: Введение. М.: Мир, 1980.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
13. *Родин В.А.* Теорема Харди–Литтлвуда для косинус-ряда в симметричном пространстве // Мат. заметки. 1976. Т. 20, №2. С. 241–246.
14. *Нурсултанов Е.Д.* Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ // Функц. анал. и его прил. 1997. Т. 31, №2. С. 79–82.
15. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
16. *Акишев Г.А.* Неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца // Уалихановские чтения–9, г. Кокшетау, 2004 г.: Матер. Междунар. науч.-практич. конф. С. 3–6.