О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ИЗ $M(L_p \to L_q)$

Е. Д. Нурсултанов

Пусть F, F^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье в $\mathbb{R}^n$. Функцию u назовем *мультипликатором преобразования Фурье* из функционального пространства Лоренца $L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ в пространство Лоренца $L_{qs}(\mathbb{R}^n)$, если оператор $T_u(f) = F^{-1}uFf$ является ограниченным из пространства $L_{pr}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{qs}(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из L_{pr} в L_{qs} обозначим через $M(L_{pr} \to L_{qs})$. Данное множество является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} = \sup_{\|f\|_{L_{pr}}\neq 0} \frac{\|T_u(f)\|_{L_{qs}}}{\|f\|_{L_{pr}}}.$$

В [1] доказана следующая

Теорема Хёрмандера. *Пусть* $1 < p < 2 \leqslant q < \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$, *тогда* $L_{r\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M\big(L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)\big)$, *т.е.*

$$\|\varphi\|_{M(L_p\to L_q)} \leqslant c \sup_{e\in E} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e |\varphi(x)|\,dx.$$

Здесь E – множество всех компактов e с положительной мерой: $|e| > 0$, $L_{p\infty}$ – пространство Лоренца. Из [2] следует, что если $s \geqslant r$, то $L_{r\infty} \hookrightarrow M(L_{pr} \to L_{qs})$, где параметры p, q, r удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме Хёрмандера. Целью данной работы является получение нижних оценок для $\varphi \in M(L_{pr} \to L_{qs})$.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Будем писать $a \leqslant b$, если $a_j \leqslant b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leqslant x \leqslant b\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ называется *отрезком в* $\mathbb{R}^n$. Множество вида

$$Q = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant N-1} ([a, b] + kh), \tag{1}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{N}^n$, $kh = (k_1h_1, \dots, k_nh_n)$, $h_j > b_j - a_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, назовем *гармоническим отрезком в* $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что всякий отрезок в $\mathbb{R}^n$ является гармоническим отрезком.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть* $1 < p < 2 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant r$, $s \leqslant \infty$, E_0 – *множество всех гармонических отрезков положительной меры в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для любой неотрицательной функции* $\varphi \in M(L_p \to L_q)$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{e\in E_0} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \varphi(x)\,dx \leqslant c\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})}. \tag{2}$$

В частности,

$$\sup_{e\in E_0} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}} \int_e \varphi(x)\,dx \leqslant c\|\varphi\|_{M(L_p\to L_q)}.$$

Введем определение правильного гармонического отрезка. Гармонический отрезок Q (см. (1)) назовем *правильным*, если для любого $j = 1, 2, \dots, n$ число $d_j = h_j/(b_j - a_j)$ является натуральным ($d_j \in \mathbb{N}$).

Лемма. *Пусть* $0 < \beta < 1$, E_1 – *множество всех правильных гармонических отрезков в* $\mathbb{R}^n$, E_0 – *множество всех гармонических отрезков в* $\mathbb{R}^n$. *Если для неотрицательной функции* φ *имеет место*

$$\sup_{e\in E_1} \frac{1}{|e|^\beta}\left|\int_e \varphi(x)\,dx\right| < +\infty,$$

то

$$\sup_{e\in E_0} \frac{1}{|e|^\beta}\int_e \varphi(x)\,dx \leqslant 2^{\beta n} \sup_{e\in E_1} \frac{1}{|e|^\beta}\int_e \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть Q – произвольный гармонический отрезок из E_0 (см. (1)). Если

$$b_j' = b_j + \frac{\{h_j/(b_j-a_j)\}}{[h_j/(b_j-a_j)]}, \qquad j=1,2,\dots,n,$$

где $\{x\}$, $[x]$ – соответственно дробная и целая части числа x. Тогда множество

$$Q' = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant N-1} ([a,b'] + hk)$$

является правильным гармоническим отрезком таким, что $Q \subset Q'$ и $|Q'| \leqslant 2^n|Q|$. Из свойства неотрицательности функции φ имеем

$$\frac{1}{|Q|^\beta}\int_Q \varphi(x)\,dx \leqslant 2^{\beta n}\frac{1}{|Q'|^\beta}\int_{Q'} \varphi(x)\,dx,$$

откуда, учитывая произвольность выбора Q из E_0, получим (3).

Доказательство теоремы. Согласно утверждению леммы для доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$c\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} \geqslant \sup_{e\in E_1} \frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}}\int_e \varphi(x)\,dx, \tag{4}$$

где E_1 – множество всех правильных гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Q – произвольный элемент E_1, тогда он имеет вид

$$Q = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant N-1} ([c,d] + kh),$$

где $[c,d]=[c_1,d_1]\times\dots\times[c_n,d_n]$, $k=(k_1,\dots,k_n)$, $h=(h_1,\dots,h_n)$, $N=(N_1,\dots,N_n)\in\mathbb{N}^n$, $kh=(k_1h_1,\dots,k_nh_n)$, $h_j/(d_j-c_j)\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,n$. Данному правильному гармоническому отрезку сопоставим правильный гармонический отрезок

$$D = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant M-1} ([0,\delta] + k\eta), \tag{5}$$

где

$$M_j = \frac{h_j}{d_j-c_j}, \quad \eta_j = \frac{\pi}{h_j}, \quad \delta_j = \frac{\pi}{N_j h_j}, \qquad j=1,\dots,n. \tag{6}$$

Из определения класса $M(L_{pr} \to L_{qs})$ имеем

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} = \sup_{\|f\|_{L_{pr}}=1} \|F^{-1}\varphi F f\|_{L_{qs}} = \sup_{\|g\|_{L_{q's'}}=1} \sup_{\|f\|_{L_{pr}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F^{-1}\varphi F f(y)\overline{g}(y)\,dy$$

$$\geqslant \sup_{\substack{|e|>0\\|w|>0}} \frac{1}{|e|^{1/q'}} \frac{1}{|w|^{1/p}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_e e^{ixy}\,dy \int_w e^{-ixz}\,dz \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+c) \left| \int_D e^{ixy}\,dy \right|^2 dx,$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Учитывая представление (5) гармонического отрезка D, имеем

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} \geqslant \frac{1}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+c) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin\frac{\delta_j x_j}{2} \sin\frac{M_j\eta_j x_j}{2}}{\frac{x_j}{2}\sin\frac{\eta_j x_j}{2}} \right)^2 dx.$$

Сделаем замену $\delta_j x_j/2$ на x_j, $j = 1, \dots, n$. Используя неотрицательность функции φ, получим

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} \geqslant \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{2x}{\delta}+c\right) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin\frac{M_j\eta_j x_j}{\delta_j}}{\sin\frac{\eta_j x_j}{\delta_j}} \,\frac{\sin x_j}{x_j} \right)^2 dx$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_{[-\pi/2,\pi/2]^n} \varphi\left(\frac{2x}{\delta}+c\right) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin\frac{M_j\eta_j x_j}{\delta_j}}{\sin\frac{\eta_j x_j}{\delta_j}} \right)^2 dx.$$

Если воспользоваться теперь соотношениями $N_j = \eta_j/\delta_j$, $j = 1, \dots, n$, и (6), заменить $N_j x_j$ на x_j, то последнее выражение примет вид

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \frac{\prod_{j=1}^n \delta_j N_j^{-1}}{|D|^{1/q'+1/p}} \int_B \varphi\left(\frac{2x}{\eta}+c\right) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\sin M_j x_j}{\sin x_j} \right)^2 dx, \tag{7}$$

где $B = [-\frac{\pi}{2}N_1, \frac{\pi}{2}N_1] \times \dots \times [-\frac{\pi}{2}N_n, \frac{\pi}{2}N_n]$.

Далее, как и раньше, принимая во внимание неотрицательность φ, оценим снизу интеграл в (7):

$$2^{-n} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n-1} M_1^2 \int_{\pi k_1}^{\pi k_1+\pi/M_1} \dots M_n^2 \int_{\pi k_n}^{\pi k_n+\pi/M_n} \varphi\left(\frac{x}{\eta}+c\right) dx$$

$$= 2^{-n} \prod_{j=1}^{n} M_j^2 \eta_j \sum_{0\leqslant k\leqslant N-1} \int_{[c,c+\pi/(M\eta)]+\pi k/\eta} \varphi(x)\,dx$$

$$= 2^{-n} \prod_{j=1}^{n} M_j^2 \eta_j \sum_{0\leqslant k\leqslant N-1} \int_{[c,d]+kh} \varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, учитывая

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}\delta_j N_j{}^{-1} M_j^2 \eta_j}{|D|^{1/q'+1/p}} = (\pi^n)^{2-(1/q'+1/p)}\biggl(\prod_{j=1}^{n} N_j(d_j-c_j)\biggr)^{-(1/p'+1/q)} = \frac{(\pi^n)^{2-(1/q'+1/p)}}{|Q|^{1/p'+1/q}},$$

получим

$$\|\varphi\|_{M(L_{pr}\to L_{qs})} \geqslant C_{pqr}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q \varphi(x)\,dx.$$

В силу произвольности выбора Q из E_1 верно неравенство (4), следовательно, и неравенство (2). Теорема доказана.

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной* (*невозрастающей*) в $\mathbb{R}^n$, если для любого $x\in\mathbb{R}^n$, $x_j\neq 0$, $j=1,\dots,n$, имеет место

$$|f(x)| \leqslant c(|x_1|\cdots|x_n|)^{-1}\biggl|\int_{[0,x]} f(y)\,dy\biggr|.$$

Здесь $[0,x]=\{y\in\mathbb{R}^n : 0\leqslant y_j \operatorname{sgn} x_j \leqslant |x_j|,\ j=1,\dots,n\}$. Все монотонные и квазимонотонные функции являются обобщенно-монотонными. Обратное не всегда верно.

Пример. Пусть $\beta>0$,

$$f(x)=\begin{cases} |x|^{-\beta} & \text{при } x\in[2k,2k+1),\ k\in\mathbb{Z},\\ 0 & \text{при } x\in[2k-1,2k),\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Функция $f(x)$ не является монотонной и квазимонотонной, в то же время является обобщенно-монотонной.

Следствие 1. *Пусть* $1<p<2\leqslant q<\infty$, $1\leqslant r\leqslant s\leqslant\infty$, φ – *знакоопределенная, обобщенно-монотонная функция. Тогда для того чтобы* $\varphi\in M(L_{pr}\to L_{qs})$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q|\varphi(x)|\,dx<\infty,$$

где E_0 – *множество всех отрезков в* $\mathbb{R}^n$ *положительной меры, т.е. всех параллелепипедов с параллельными декартовым плоскостям сторонами.*

Доказательство. Достаточно доказать для неотрицательной функции φ, что

$$\sup_{e\in E}\frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}}\int_e\varphi(x)\,dx \leqslant c\sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q\varphi(x)\,dx,$$

где E – множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\begin{aligned}\sup_{e\in E}\frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}}\int_e\varphi(x)\,dx &\leqslant \sup_{e\in E}\frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}}\int_e\frac{1}{|x_1|\cdots|x_n|}\int_{[0,x]}\varphi(y)\,dy\,dx\\ &\leqslant \sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q\varphi(x)\,dx\,\sup_{e\in E}\frac{1}{|e|^{1/p'+1/q}}\int_e\frac{1}{(|x_1|\cdots|x_n|)^{1-(1/p'+1/q)}}\,dx\\ &= c\sup_{Q\in E_0}\frac{1}{|Q|^{1/p'+1/q}}\int_Q\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Пусть M – некоторое фиксированное семейство множеств $e \subset \mathbb{R}^n$ конечной положительной меры ($|e| > 0$). Для интегрируемой на каждом $e \in E$ функции φ определим функцию

$$\overline{\varphi}(t, M) = \sup_{\substack{|e| \in M \\ |e| \geqslant t}} \frac{1}{|e|} \left| \int_e \varphi(x)\,dx \right|, \qquad t \in (0, \infty),$$

которую назовем *средней функцией для* φ *по сети* M.

Будем говорить, что функция φ имеет *доминирующие гармонические осцилляции в* $\mathbb{R}^n$, если

$$\sup_{t>0} \frac{\overline{\varphi}(t, E)}{\overline{\varphi}(t, E_0)} < \infty.$$

Здесь E – множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$, E_0 – множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{R}^n$. Множество всех функций, имеющих доминирующие гармонические осцилляции, обозначим через Λ.

Множество Λ содержит все кусочно-монотонные функции [3] и обобщенно-монотонные функции.

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < 2 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, φ – *знакоопределенная функция из* Λ. *Тогда для того чтобы* $\varphi \in M(L_{pr} \to L_{qs})$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi \in L_{r\infty}$, *где* $1/r = 1/p - 1/q$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hörmander L. // Acta Math. 1960. V. 104. P. 93–140. **2**. Нурсултанов Е. Д., Бернiязов Е. Е. // Современные вопросы теории функций и функцион. анализа. Караганда, 1992. С. 30–38. **3**. Дьяченко М. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №6. С. 1156–1170.

Институт прикладной математики Республики Казахстан, г. Караганда
E-mail: nursult@ipm.karaganda.su

Поступило
06.03.97
Исправленный вариант
09.06.97