Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 4 (26) . С. 34 – 43*

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Д.К. Дарбаева, Е.Д. Нурсултанов

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова
010000 Астана ул. Мунайтпасова, 5 er-nurs@yandex.ru

В данной работе доказывается неравенство Бернштейна-Никольского для анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{pq}^*}$, что позволяет раскрыть зависимость константы от сильных и слабых параметров относительно каждой переменной.

Введение.

Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\bar{k}^{\alpha} = \prod_{j=1}^{n} (max(|k_j|, 1))^{\alpha_j}$, $\alpha \in R$,

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx}, \ \ T_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |\bar{k}|^{\alpha} e^{2\pi ikx}$$

– тригонометрические полиномы n-го порядка. Верны классические неравенства для тригонометрических полиномов

$$\|T_n^{\alpha}\|_{L_\infty} \leq n^{\alpha} \|T_n\|_{L_\infty}, \tag{1}$$

$$\|T_n\|_{L_q} \leq c n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_{L_p}, \tag{2}$$

которые называются соответственно неравенствами Бернштейна и Никольского ([1]). Эти неравенства являются фундаментальным аппаратом исследования в теории приближения, теории функциональных пространств.

В пространствах с доминирующей смешанной производной наилучшие приближения реализуются на тригонометрических полиномах со спектром из гиперболических крестов, то есть на множествах вида

$$\Gamma_N = \{k \in Z^n : \bar{k} = \prod_{j=1}^{n} max(|k_j|, 1) \leq N\}.$$

Keywords: *Lorentz space, anisotropic space, strong and weak parametrs*
2000 Mathematics Subject Classification: 35L20

Следуя работе Темлякова [2], неравенство Бернштейна-Никольского примет следующий вид: пусть $1 \le p \le r < \infty$, $\alpha = \alpha_1 = ... = \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1} \ge ... \ge \alpha_n$, $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, тогда для тригонометрических полиномов

$$T_{\Gamma_N(x)} = \sum_{k \in \Gamma_N} c_k e^{2\pi i k x},$$

$$T^{\alpha}_{\Gamma_N(x)} = \sum_{k \in \Gamma_N} c_k \prod_{j=1}^{n} max(|k_j|)^{\alpha_j} e^{2\pi i k_j x_j}$$

$$\|T^{(\alpha)}_{\Gamma_N}\|_{L_\infty} \le c N^{\alpha+\frac{1}{p}} (\ln N)^{(1-\frac{1}{p})(\nu-1)} \left|\left| T_{\Gamma_N} \right|\right|_{L_p}. \tag{3}$$

Если $\alpha \ge 0$, то

$$\|T^{(\alpha)}_{\Gamma_N}\|_{L_r} \le c N^{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_p}. \tag{4}$$

В данной работе мы рассматриваем неравенство Бернштейна-Никольского в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{pq}^*}$ [3],[4], это позволяет достаточно полностью раскрыть природу константы, а именно: ее зависимость от сильных и слабых параметров относительно каждой переменной.

Пусть f – функция, измеримая относительно n мерной меры Лебега μ, определенная на $[0,1]^n$,

$$m(\sigma, f) = \mu\{x : |f(x)| > \sigma\}$$

– ее функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \le t\}$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть векторы $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ удовлетворяют условиям: если $0 < q_j < \infty$, то $0 < p_j < \infty$, если $q_j = \infty$, то $0 < p_j \le \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Для произвольной перестановки $* = (j_1, j_2, ..., j_n)$ последовательности $(1, 2, ..., n)$ и $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ определим соответствующий функционал

$$\Phi_{\mathbf{pq}*}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \ldots \left(\int_0^\infty \left| t_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots t_n^{\frac{1}{p_n}} \varphi(t_1, \ldots, t_n) \right|^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{\frac{q_{j_2}}{q_{j_1}}} \ldots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}},$$

здесь выражение $\left(\int_0^\infty (G(s))^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимается, как $\sup_{s>0} G(s)$.

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – измеримая 1-периодическая функция, заданная в $[0,1]^n$. Через $f^{*_1, ..., *_n}(t_1, ..., t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, ..., x_n \in \mathbb{R}^{m_n}$ при фиксированных остальных переменных. Данную функцию будем называть невозрастающей перестановкой функции f в $[0,1]^n$.

Пространство $L_{\mathbf{pq}*}[0,1]^n$ определяется как множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}*}[0,1]^n} = \Phi_{\mathbf{pq}*}(f^{*_1 \cdots *_n}(\cdot)) < \infty. \tag{5}$$

1. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть $\beta_0, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, $0 < q_i \le \infty$, $\gamma > 0$,

$$A_M = 2^{\beta_0 M} \left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n} \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\beta-\beta_0)k_j} (M - k_1 - ... - k_n + 1)^\gamma \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} ... \right)^{\frac{1}{q_n}}, \tag{6}$$

тогда при $\beta_0 < \beta$ верно
$$A_M \sim 2^{\beta M} M^{\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+...+\frac{1}{q_n}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta_0 < \beta$. Используя соотношение $\sum_{k=0}^{N} 2^{\alpha k}(N-k)^{\beta} \sim 2^{\alpha N}$, при $\alpha > 0$ получим следующее:

$$A = 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n}\left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\beta-\beta_0)k_j}(M-k_1-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_2=0}^{M-k_3-...-k_n}\left(\prod_{j=2}^{n} 2^{(\beta-\beta_0)k_j} 2^{(\beta-\beta_0)(M-k_2-...-k_n+1)}\right)^{q_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_2=0}^{M-k_2-...-k_n} (1)^{q_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_3=0}^{M-k_4-...-k_n} \left((M-k_3-...-k_n+1)^{\frac{1}{q_2}}\right)^{q_3}\right)^{\frac{q_4}{q_3}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_4=0}^{M-k_5-...-k_n} \left((M-k_4-...-k_n+1)^{\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}}\right)^{q_4}\right)^{\frac{q_5}{q_4}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim ... \sim 2^{\beta M} M^{\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+...+\frac{1}{q_n}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\beta_0, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, $0 < q_i \leq \infty$, $\gamma > 0$,

$$A_M = 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n}\left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\beta-\beta_0)k_j}(M-k_1-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}},$$

тогда при $\beta_0 > \beta$ верно
$$A_m \sim c2^{\beta_0 M} M^{\gamma}.$$

Доказательство. Пусть $\beta_0 > \beta$. Из соотношения $\sum_{k=0}^{N} 2^{\alpha k}(N-k)^{\beta} \sim N^{\beta}$ при $\alpha < 0$ вытекает

$$A = 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n}\left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\beta-\beta_0)k_j}(M-k_1-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M} ... \left(\sum_{k_2=0}^{M-k_3-...-k_n}\left(\prod_{j=2}^{n} 2^{(\beta_0-\beta_0)k_j}(M-k_2-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}} ...\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim 2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_3=0}^{M-k_4-...-k_n}\left(\prod_{j=3}^{n}2^{(\beta-\beta_0)k_j}(M-k_3-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_3}\right)^{\frac{q_4}{q_3}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$\sim ... \sim 2^{\beta_0 M}M^{\gamma}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\beta_0,\beta\in\mathbf{R},\ \ \beta>0,\ \ 0<q_i\le\infty,\ \ \gamma>0,$

$$A_M=2^{\beta_0 M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n}\left(\prod_{j=1}^{n}2^{(\beta-\beta_0)k_j}(M-k_1-...-k_n+1)^{\gamma}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}...\right)^{\frac{1}{q_n}},$$

тогда при $\beta_0=\beta$ верно

$$A_M\sim 2^{\beta M}M^{\gamma+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta_0=\beta$. Для доказательства используем, что $\sum_{k+0}^{N}(N-k)^{\beta}\sim N^{\beta+1}$. Имеем

$$A=2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_1=0}^{M-k_2-...-k_n}((M-k_1-...-k_n+1)^{\gamma})^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_2=0}^{M-k_3-...-k_n}\left((M-k_2-...-k_n+1)^{q_1\gamma+1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{q_3}{q_2}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_2=0}^{M-k_3-...-k_n}\left((M-k_2-...-k_n+1)^{\gamma+\frac{1}{q_1}}\right)^{q_2}\right)^{\frac{q_3}{q_2}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_3=0}^{M-k_4-...-k_n}\left((M-k_3-...-k_n)^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}}\right)^{q_3}\right)^{\frac{q_4}{q_3}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$\sim 2^{\beta M}\left(\sum_{k_n=0}^{M}...\left(\sum_{k_4=0}^{M-k_5-...-k_n}\left((M-k_4-...-k_n)^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}}\right)^{q_4}\right)^{\frac{q_5}{q_4}}...\right)^{\frac{1}{q_n}}\sim$$

$$...\sim 2^{\beta M}M^{\gamma+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+...+\frac{1}{q_n}}=2^{\beta M}M^{\gamma+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}}.$$

Лемма доказана.

3. Неравенство разных метрик в анизотропных классах Лоренца.

Пусть $\alpha\in R^n,\ 1<\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)<\infty,\ 0<\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_n)\le\infty,\ *=(j_1,j_2,...,j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1,2,...,n)$.

Пространство $B^{\alpha}_{\mathbf{pq}^*}[0,1]^n$ определяется, как множество рядов $f=\sum_{k\in Z^n}a_ke^{2\pi ikx}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{\mathbf{pq}^*}[0,1]^n}=$$

$$= \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_{j_1}=0}^{\infty} \left(2^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_j} \| \Delta_k(f) \|_{L_p} \right)^{q_{j_1}} \right)^{\frac{q_{j_2}}{q_{j_1}}} \dots \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}},$$

где $\Delta_k(f) = \sum_{2^{k_j-1} \le |m_j| < 2^{k_j}} a_m e^{2\pi imx}, k \in Z_+^n$.

Следующая лемма является следствием теоремы вложения из работы [5] (см.теорема 4).

Лемма 4. Пусть $1 < \mathbf{p_1} = (p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1) < \infty$, $1 < \mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) < \infty$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n) \le \infty$, $\frac{1}{\mathbf{p_1}} = \frac{1}{\mathbf{r}} - \gamma$, тогда

$$B^{\gamma}_{\mathbf{rq}^\star}[0,1]^n \hookrightarrow L_{\mathbf{p_1 q}^\star}[0,1]^n.$$

Для $s \in \mathbb{N}^n$ введем множество Q_s такое,что

$$Q_s = \{k \in \mathbb{Z}^n : 0 \le |k_j| \le 2^{s_j}, j = 1, ..., n\}.$$

Ступенчатым гиперболическим крестом назовем множество

$$\Lambda_m = \cup_{s_1 + ... + s_n = m} Q_s,$$

а гиперболическим крестом назовем множество

$$\Gamma_N = \{k \in \mathbb{Z}^n : \bar{k} = \prod_{j=1}^{n} \max(|k_j|, 1) \le N\}.$$

Пусть $T_{\Gamma_N}(x) = \sum_{k \in \Gamma_N} c_k e^{2\pi ikx}, T_{\Lambda_m}(x) = \sum_{k \in \Lambda_m} c_k e^{2\pi ikx}$, $kx = k_1 x_1 + ... + k_n x_n$ – тригонометрические многочлены, соответствующие гиперболическому кресту Γ_N и ступенчатому гиперболическому кресту Λ_m .

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}$, $\bar{k}^\alpha = \prod_{j=1}^{n} (\max(|k_j|, 1))^{\alpha_j}$. Через $T^\alpha_{\Gamma_N}$ и $T^\alpha_{\Lambda_m}$ обозначим соответственно тригонометрические полиномы

$$\sum_{k \in \Gamma_N} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi ikx},$$

$$\sum_{k \in \Lambda_m} c_k \bar{k}^\alpha e^{2\pi ikx}.$$

Теорема 1. *Пусть* $N, m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \mathbf{q} = (q_1, ..., q_n) \le \infty$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = \max_{1 \le j \le n} (\alpha_j + \frac{1}{p_j}), \star = (j_1, ..., j_n)$ *– некоторая перестановка последовательности* $(1, 2, ..., n)$, $A = \{j : \alpha_j + \frac{1}{p_j} = \beta\}$, $k_0 = \min\{k : j_k \in A\}$.

Если $\beta > 0$, *то*

$$\| T^\alpha_{\Gamma_N} \|_{L_\infty [0,1]^n} \le c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} N^\beta (\ln(N+2))^{(\sum_{j \in A} \frac{1}{q'_j}) - \frac{1}{q'_{j_{k_0}}}} \| T_{\Gamma_N} \|_{L_{\mathbf{pq}^\star} [0,1]^n}. \quad (7)$$

Если $\beta = 0$, *то*

$$\| T^\alpha_{\Gamma_N} \|_{L_\infty [0,1]^n} \le c_{\mathbf{p},\mathbf{q}} (\ln(N+2))^{\sum_{j \in A} \frac{1}{q'_j}} \| T_{\Gamma_N} \|_{L_{\mathbf{pq}^\star} [0,1]^n}.$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{m-1} \le N < 2^m$, тогда Λ_m – минимальный ступенчатый гиперболический крест, содержащий Γ_N. Поэтому для полинома $T^{\alpha}_{\Gamma_N}$ имеет место представление

$$T^{\alpha}_{\Gamma_N}(y) = \int_{[0,1]^n} U^{\alpha}_{\Lambda_m}(y-x) T_{\Gamma_N}(x)dx.$$

Тогда из неравенства Гельдера для пространств $L_{\mathbf{pq}^\star}[0,1]^n$ имеем

$$\|T^{\alpha}_{\Gamma_N}(y)\|_{L_\infty} \le c\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^\star}} \|T_{\Gamma_N}(x)\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}.$$

Рассмотрим $U^{\alpha}_{\Lambda_m}(x) = \sum_{k\in\Lambda_m} c_k \bar{k}^{\alpha} e^{2\pi ikx}$. Пусть $\mathbf{q}'^\star = \begin{pmatrix} q'_1, q'_2, ..., q'_n \\ j_1, j_2, ..., j_n \end{pmatrix}$, где $q'_i = \frac{q_i}{q_i - 1}$. Зафиксируем $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n : 1 < \mathbf{r} < \mathbf{p}'$.

Согласно лемме 4 величина $\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'*}}$ оценивается следующим образом:

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^\star}} \le c \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{\infty} ... \left(\sum_{k_{j_1}=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p'_j})k_j} \|\Delta_k U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_r \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} ... \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \sim$$

$$\sim c \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m} ... \left(\sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-...-k_{j_n}} \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p'_j} + \alpha_j + \frac{1}{r'_j})k_j} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} ... \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} =$$

$$= c \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m} ... \left(\sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-...-k_{j_n}} \left(\prod_{j=1}^{n} 2^{\varphi_j k_j} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} ... \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}},$$

где $\beta_j = \alpha_j + 1 - \frac{1}{p'_j} = \alpha_j + \frac{1}{p_j}$.

Пусть $\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = ... = \beta_{j_{l_1}}$, где $1 \le l_1 \le n$,

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^\star} \le c \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m} ... \left(\sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-...-k_{j_n}} ... \left(\sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-...-k_{j_n}} \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{\beta_{j_i} k_{j_i}} \right)^{q'_{j_1}} \right)^{\frac{q'_{j_2}}{q'_{j_1}}} ... \right)^{\frac{q'_{j_{l_1+1}}}{q'_{j_{l_1}}}} ... \right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Применяя лемму 3 к последнему выражению, получим следующе

$$c \left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m} ... \prod_{i=l_1+1}^{n} 2^{\varphi_{j_i} k_{j_i}} \left(\sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-...-k_{j_n}} ... \right.\right.$$

$$\ldots\left(\sum_{k_{j_2}=0}^{m-k_{j_3}-\ldots-k_{j_n}}\left(\prod_{i=2}^{l_1}2^{\beta_{j_i}k_{j_i}}2^{\beta_{j_1}(m-k_{j_2}-\ldots-k_{j_n}+1)}\right)^{q'_{j_2}}\right)^{\frac{q'_{j_3}}{q'_{j_2}}}\ldots\Bigg)\ldots\Bigg)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}\sim$$

$$\sim c2^{\varphi_{j_1}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\ldots\prod_{i=l_1+1}^{n}2^{\beta_{j_i}k_{j_i}}\left(\sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\ldots-k_{j_n}}\ldots\left(\sum_{k_{j_2}=0}^{m-k_{j_3}-\ldots-k_{j_n}}(1)^{q'_{j_2}}\right)^{\frac{q'_{j_3}}{q'_{j_2}}}\right)\ldots\right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}\sim$$

$$\sim c2^{\beta_{j_1}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\ldots\prod_{i=l_1+1}^{n}2^{\beta_{j_i}k_{j_i}}\left(\sum_{k_{j_{l_1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+1}}-\ldots-k_{j_n}}\ldots\right.\right.$$

$$\left(\sum_{k_{j_3}=0}^{m-k_{j_4}-\ldots-k_{j_n}}\left((m-k_{j_3}-\ldots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}}\right)^{q'_{j_3}}\right)^{\frac{q'_{j_4}}{q'_{j_3}}}\ldots\Bigg)\ldots\Bigg)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}\sim$$

$$\sim\ldots\sim c2^{\beta_{j_1}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\ldots\left(\sum_{k_{j_{l_1+1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+2}}-\ldots-k_{j_n}}\right.\right.$$

$$\prod_{i=l_1+1}^{n}\left(2^{(\beta_{j_i}-\beta_1)k_{j_i}}(m-k_{j_{l_1+1}}-\ldots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}+\ldots+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}}\right)^{q'_{j_{l_1+1}}}\Bigg)^{\frac{q'_{j_{l_1+2}}}{q'_{j_{l_1+1}}}}\ldots\Bigg)^{\frac{1}{q'_{j_n}}} \qquad (8)$$

Пусть $\beta_{j_{l_1+1}}=\beta_{j_{l_1+2}}=\ldots=\beta_{j_{l_2}}$, где $l_1+1\le l_2\le n$, тогда выражение (8) будет равно

$$c2^{\beta_{j_1}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\ldots\prod_{i=l_2+1}^{n}2^{(\beta_{j_i}-\beta j_1)k_{j_i}}\left[\sum_{k_{j_{l_2}}=0}^{m-k_{j_{l_2+1}}-\ldots-k_{j_n}}\ldots\right.\right.$$

$$\ldots\left(\sum_{k_{j_{l_1+1}}=0}^{m-k_{j_{l_1+2}}-\ldots-k_{j_n}}\left(\prod_{i=l_1+1}^{l_2}2^{(\beta_{j_i}-\beta j_1)k_{j_i}}(m-k_{j_{l_1+1}}-\ldots-k_{j_n}+1)^{\frac{1}{q'_{j_2}}+\ldots+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}}\right)^{q'_{j_{l_1+1}}}\right)^{\frac{q'_{j_{l_1+2}}}{q'_{j_{l_1+1}}}}\ldots\Bigg]\ldots\Bigg)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Выражение в квадратных скобках имеет форму (6) из леммы 1, где $M=(m-k_{j_{l_2+1}}-\ldots-k_{j_n})$, $\gamma=\frac{1}{q'_{j_2}}+\frac{1}{q'_{j_3}}+\ldots+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}$.

Воспользовавшись этой леммой, получим

$$c2^{\beta_{j_{l_1+1}}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}...\left(\sum_{k_{j_{l_2+1}}=0}^{m-k_{j_{l_2+2}}-...-k_{j_n}}\left(\prod_{i=l_2+1}^{n}2^{(\beta_{j_i}-\beta_{j_1})k_{j_i}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(m-k_{j_{l_1+1}}-...-k_{j_n}+1\right)^{\frac{1}{q'_{j_{l_1+2}}}+...+\frac{1}{q'_{j_{l_2}}}}\right)^{q'_{j_{l_2+1}}}\right)^{\frac{q'_{j_{l_2+2}}}{q'_{j_{l_2+1}}}}...\right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

А согласно лемме 2 имеем

$$c2^{\beta_{j_1}m}\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}...\left(\sum_{k_{j_{l_2+1}}=0}^{m-k_{j_{l_2+2}}-...-k_{j_n}}\left(\prod_{i=l_2+1}^{n}2^{(\beta_{j_i}-\beta i_{j_1})k_{j_i}}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(m-k_{j_{l_1+1}}-...-k_{j_n}+1\right)^{\frac{1}{q'_{j_2}}+...+\frac{1}{q'_{j_{l_1}}}}\right)^{q'_{j_{l_2+1}}}\right)^{\frac{q'_{j_{l_2+2}}}{q'_{j_{l_2+1}}}}...\right)^{\frac{1}{q'_{j_n}}}.$$

Повторяем этот процесс далее и как только дойдем до максимального, мы заметим, что возможны два случая, описываемые в леммах 2 и 3, то есть $\beta_0>\beta$, либо $\beta_0=\beta$. Если в первом согласно лемме 2 форма (6) сохраняется, то во втором согласно лемме 3 будет идти накопление в степенном показателе.

Таким образом, получили оценку

при $\beta>0$

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{p'q'}^\star}\leq N^{\beta}(\ln N)^{(\sum_{j\in A}\frac{1}{q'_j})-\frac{1}{q'_{j_{k_0}}}},$$

при $\beta=0$

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{p'q'}^\star}\leq N^{\sum_{j\in A}\frac{1}{q'_j}}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда $\alpha=0$, из теоремы 1 сдедует результат из работы [6].

Теорема 2. *Пусть* $N,m\in\mathbf{N}$, $1<\mathbf{p}=(p_1,...,p_n),\mathbf{r}=(r_1,...,r_n)<\infty$, $0<\mathbf{q}=(q_1,...,q_n)$, $\mathbf{d}=(d_1,...,d_n)\leq\infty$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, $\beta=\max_{1\leq j\leq n}(\alpha_j-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{r_j}),\star=(j_1,...,j_n)$ *некоторая перестановка последовательности* $(1,2,...,n)$, $A=\{j:\alpha_j-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{r_j}=\beta\}$, $k_0=\min\{k:j_k\in A\}$, $\frac{1}{\theta_i}=\left(\frac{1}{q_i}-\frac{1}{d_i}\right)_+$.

Если $\beta>0$, *то*

$$\|T^{\alpha}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}[0,1]^n}\leq cN^{\beta}(\ln(N+2))^{(\sum_{j\in A}\frac{1}{\theta_j})-\frac{1}{\theta_{j_{k_0}}}}\|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}[0,1]^n}. \tag{9}$$

Если $\beta = 0$, *то*

$$\|T^{\alpha}_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}[0,1]^n} \le c(\ln(N+2))^{\sum_{j\in A}\frac{1}{\theta_j}} \|T_{\Gamma_N}\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}[0,1]^n}.$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{m-1} \le N < 2^m$, тогда Λ_m – минимальный ступенчатый гиперболический крест, содержащий Γ_N. Рассмотрим частичную сумму ряда фурье $T^{\alpha}_{\Gamma_N}$, для которой заметим, что

$$T^{\alpha}_{\Gamma_N}(y) = U^{\alpha}_{\Lambda_m} * T_{\Gamma_N}.$$

Тогда из неравенства Юнга-О'Нейла для пространств $L_{pq^\star}[0,1]^n$ имеем [8]

$$\|T^{\alpha}_{\Gamma_N}(y)\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}} \le c\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{L_{\mathbf{h}\theta^\star}}\|T_{\Gamma_N}(x)\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}}.$$

Рассмотрим $U^{(\alpha)}_{\Lambda_m}(x) = \sum_{k\in\Lambda_m} c_k\bar{k}^{\alpha}e^{2\pi ikx}$. Пусть $\theta^\star = \binom{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n}{j_1,j_2,\dots,j_n}$, где $\frac{1}{h_i} = \left(1+\frac{1}{p_i}-\frac{1}{r_i}\right)$. Зафиксируем $\nu \in \mathbb{R}^n : 1 < \nu < \mathbf{h}$.

Для оценки $\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{h}\theta^\star}$ воспользуемся леммой 4:

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{h}\theta^\star} \le c\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{\infty}\dots\left(\sum_{k_{j_1}=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}2^{\frac{1}{\nu_j}-\frac{1}{h_j}k_j}\|\Delta_k U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\nu}\right)^{\theta_{j_1}}\right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}}\dots\right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}} \sim$$

$$\sim c\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\dots\left(\sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}}\left(\prod_{j=1}^{n}2^{(\frac{1}{\nu_j}-\frac{1}{h_j}+\alpha_j+\frac{1}{\nu'_j})\nu_j}\right)^{\theta_{j_1}}\right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}}\dots\right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}} =$$

$$= c\left(\sum_{k_{j_n}=0}^{m}\dots\left(\sum_{k_{j_1}=0}^{m-k_{j_2}-\dots-k_{j_n}}\left(\prod_{j=1}^{n}2^{\beta_j k_j}\right)^{\theta_{j_1}}\right)^{\frac{\theta_{j_2}}{\theta_{j_1}}}\dots\right)^{\frac{1}{\theta_{j_n}}},$$

где $\beta_j = \alpha - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j}$.

Далее, применив к величине $\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{h}\theta^\star}$ преобразования, аналогичные в теореме 1, получим следующую оценку:

при $\beta > 0$

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{h}\theta^\star} \le N^{\beta}(\ln N)^{(\sum_{j\in A}\frac{1}{\theta_j})-\frac{1}{\theta_{j_{k_0}}}},$$

при $\beta = 0$

$$\|U^{\alpha}_{\Lambda_m}\|_{\mathbf{h}\theta^\star} \le N^{\sum_{j\in A}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Теорема доказана.

Форма константы в неравенствах (7),(9) позволяет видеть „что за что" отвечает. Так, логарифмическая компонента связана со слабыми параметрами, а именно: с теми слабыми, которые соответствуют сильным параметрам, реализующим $\max(\alpha_i - \frac{1}{p_i})$. Здесь также учитывается порядок интегрирования так, что из $\sum_{i\in A}\frac{1}{q'_i}$ вычитается компонента $\frac{1}{q'_{i_0}}$, которая впервые встречается при интегрировании в норме $\|\cdot\|_{L_{\mathbf{pq}^*}}$, то есть учитывается параметр $* = (j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Данное наблюдение было невозможно увидеть в неравенстве (3)

Далее, если рассматривать неравенство (2) в классе Лоренца, то имеем

$$\|T_n\|_{L_{qr}} \leq cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_{L_{pr}}. \tag{10}$$

Как видим, слабые параметры не играют никакой роли в неравенствах разных метрик Никольского. В то же время в неравенстве (4) слабые параметры вносят существенный вклад, что принципиально отличает это неравенство от классического случая.

Цитированная литература

1. **Никольский С.М.** // Труды Матем. института АН СССР. 1951. Т.38. С. 244 – 278.

2. **Темляков В.Н.** // Труды МИАН СССР. 1986. Т.178. С. 1 – 112.

3. **A.P.Blozinsky** Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms. // Trans.Amer.Math.Soc., 1981.

4. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН. 2000. Т.64, №1. С. 95 – 122.

5. **Нурсултанов Е.Д.** // Доклады РАН. 2004. Т.394, №1. С. 1 – 4.

6. **Нурсултанов Е.Д.** // Труды МИРАН. 2006. Т.255. С. 1 – 18.

7. **Нурсултанов Е.Д.** // Математический сборник. 1998. Т.189, №3. С. 83 – 102.

8. **Дарбаева Д.К.,Нурсултанов Е.Д.** // Доклады межд. конф. „Конференция молодых ученых ЕНУ им. Л.Н.Гумилева“, 2006.

Поступила в редакцию 17.10.2007 г.