Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 1, 78—79

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОРНЕЙ СЛАБОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ

Е. Д. Нурсултанов

Вопросу факторизации гиперболического пучка операторов посвящены статьи [1]—[5] и др. Наиболее сильный результат приведен в работе А. С. Маркуса, В. И. Мацаева [5], в которой получена теорема факторизации для слабогиперболического пучка операторов, т. е. таких гиперболических пучков, спектральные зоны которых допускают смыкание. Оставался открытым вопрос — в случае, когда точка смыкания двух соседних спектральных зон является собственным значением пучка, будет ли оно собственным значением отщепляемого фактора и, если будет, то какая часть собственных и присоединенных векторов (у слабогиперболического пучка может появиться жорданова клетка размера 2 именно в общей точке соседних зон) будет являться собственными и присоединенными векторами фактора.

В этой заметке приводится теорема факторизации слабо гиперболического пучка, доказательство которой основано на использовании теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, причем описывается, какую часть собственных векторов забирает фактор.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Полиномиальный операторный пучок $L(\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1}A_{n-1} + \ldots + A_0$ будем называть слабогиперболическим, если при любом $f \neq 0$ все корни полинома $(L(\lambda)f, f)$ вещественны. Обозначим через $P_1(f) \geqslant P_2(f) \geqslant \ldots \geqslant P_n(f)$ корни полинома $(L(\lambda)f, f)$. Множество значений функционала $P_j(f)$ $(f \in \mathfrak{H}\setminus\{0\})$ называется j-й спектральной зоной пучка $L(\lambda)$ и обозначается Δ_j. Можно дать эквивалентное определение слабогиперболического пучка. Пучок $L(\lambda)$ называют слабогиперболическим, если существуют вещественные числа $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_{n-1}$: $(-1)^i L(a_i) \geqslant 0$ (случай, когда $a_{j_0} = a_{j_0+1}$ — тривиальный, т. е. $L(a_j) \equiv 0$; поэтому будем рассматривать слабогиперболические пучки, у которых $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$).

Сопоставим пучку $L(\lambda)$ определенный в ортогональной сумме $\tilde{\mathfrak{H}} = \sum_1^n \oplus \mathfrak{H}$ n экземпляров гильбертовых пространств ограниченный оператор

$$H = \begin{pmatrix} b_1 I & 0 & \ldots & B_1 \\ 0 & b_2 I & \ldots & B_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1 & D_2 & \ldots & -A_{n-1} - \sum\limits_1^{n-1} b_i I \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где операторы D_i и B_i удовлетворяют условию

$$D_i B_i = -L(b_i) \Big/ \prod_{k\neq i} (b_i - b_k).$$

Лемма 1 [6]. *Спектр пучка $L(\lambda)$ совпадает со спектром оператора H, причем, зная систему собственных и присоединенных к нему векторов одного из них, можно построить собственные и присоединенные векторы другого.*

В частности, слабогиперболическому пучку $L(\lambda)$ в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ соответствует самосопряженный оператор H, где $B_i = -D_i = \left(L(a_i) \Big/ \prod\limits_{k\neq i} (a_i - a_k)\right)^{1/2}$, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, — из определения слабогиперболического пучка; только в этом случае присоединенному вектору пучка $L(\lambda)$ будет соответствовать собственный вектор оператора H.

Зафиксируем индекс j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, и сопоставим числам $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ числа $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ такие, что $b_1 > a_1$ и $L(b_1) \geqslant 0$, $b_2 = a_1, \ldots, b_j = a_{j-1}$, $b_{j+1} = a_{j+1}, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1}$.

Пусть a_j — нормальное собственное значение слабогиперболического пучка $L(\lambda)$, $f_0^1, \ldots, f_0^s, f_0^{s+1}, f_1^{s+1}, \ldots, f_0^p, f_1^p$ — собственные и присоединенные векторы, отвечающие a_j. Введем числа

$$M^{mk} = \prod_{i=1}^{n-1} (a_j - b_i) \left[(L'(a_j) f_0^m, f_{p_k}^k) + \frac{1}{2} (L''(a_j) f_0^m, f_{p_k-1}^k) \right]$$

где $f_{-1}^k = 0$, $p_k = 0$ при $k \leqslant s$, $p_k = 1$ при $k > s$.

Л е м м а 2. *Цепочки собственных и присоединенных векторов можно выбрать так, чтобы* $M^{mk} = 0$ *при* $m \neq k$ *и* $M^{mk} \neq 0$ при $m = k$.

Доказательство аналогично [7], лемма 8.

Пусть

$$f_0^1, \ldots, f_0^s, f_0^{s+1}, f_1^{s+1}, \ldots, f_0^p, f_1^p \tag{2}$$

— приведенная система собственных и присоединенных векторов, соответствующая собственному значению a_j, т. е. $M^{mk} = 0$ при $k \neq m$ и $M^{mm} \neq 0$. Собственный вектор f_0^k, $1 \leqslant k \leqslant s$ называется вектором первого рода, если $M^{kk} > 0$. Из системы векторов (2) выделим подсистему E^+, в которую кроме векторов первого рода входят векторы f_0^{s+1}, $f_0^{s+2}, \ldots, f_0^p$.

Т е о р е м а. *Пусть* j — *фиксированный индекс*, $1 \leqslant j \leqslant n - 1$. *Для слабогиперболического пучка* $L(\lambda)$ *имеет место факторизация* $L(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda)$, *где* $Q(\lambda)$, $P(\lambda)$ — *полиномиальные операторные пучки соответственно порядков* $n - j$, j *и* $\sigma(P(\lambda)) \subset \bigcup_{k=1}^{j} \overline{\Delta}_k$, *причем если точка* a_j *является нормальным собственным значением* $L(\lambda)$, *то* a_j *будет собственным значением пучка* $P(\lambda)$ *тогда и только тогда, когда система* E^+ *не пуста и в этом случае* E^+ *есть система собственных векторов пучка* $P(\lambda)$, *отвечающая* a_j.

Э т а п ы д о к а з а т е л ь с т в а. Показывается, что некоторый оператор вида (1) дефинитный и, следовательно, (см. [1]) существует максимальное J-неотрицательное инвариантное подпространство, где

$$J = \operatorname{diag}(\underbrace{I, \ldots, I}_{j}, -I, \ldots, -I).$$

Отсюда получаем (см. [6]) разложение. При расщеплении корневого подпространства используется аппарат, построенный А. Г. Костюченко и М. Б. Образовым [7].

Аналогично получается факторизация, когда правый фактор соответствует произвольно фиксированному набору спектральных зон.

Автор приносит благодарность А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликову за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лангер Г.* // ДАН СССР.— 1966. Т. 169.— С. 12—15. **2.** *Маркус А. С.*, *Мацаев В. И.*, *Руссу Г. И.* // Acta Scient. Math.— 1973. V. 34.— P. 245—271. **3.** *Оразов М.Б.*, *Радзиевский Г. В.* // Сиб. мат. журн.— 1975. Т. 16, № 3.— С. 572—587. **4.** *Langer H.* // Acta sci math.— 1976. V. 38, № 1—2.— P. 83—86. **5.** *Маркус А. С.*, *Мацаев В. И.* // Функцион. анализ и его прил.— 1976. Т. 10, вып. 1.— С. 81—83. **6.** *Нурсултанов Е. Д.* // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-мат.— 1982. Т. 5.— С. 60—63. **7.** *Костюченко А. Г.*, *Оразов М. В.* // Фукцион. анализ и его прил.— 1975. Т. 9, вып. 4.— С. 28—40. **8.** *Шкаликов А. А.* // ДАН СССР.— 1985. Т. 283, № 5.— С. 1100—1105.

Карагандинский государственный университет

Поступило в редакцию 30 апреля 1987 г.