Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 4 (22) . С.86 — 95*

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

КФ МГУ им.М.В.Ломоносова
010010, г.Астана, ул.Мунайтпасова, 7,
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева
010008 Астана, ул.Мунайтпасова, 5

Рассматриваются вопросы восстановления интегралов, мультипликативных преобразований функции по конечной линейной информации. Исследованы связи данной задачи с другими задачами теории приближений. Для некоторых операторов восстановления выписаны их погрешности в терминах коэффициентов Фурье.

1. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M}$ из линейного нормированного пространства Y семействами $n-$ мерных подпространств $\langle e_1, ..., e_N\rangle$ пространства Y – классическая задача теории аппроксимаций. Она сводится к вычислению (оценке) величин

$$d_N(\mathfrak{M}, Y) = \inf_{(e_1,...,e_N)} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \inf_{\lambda_i} \|x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i\|_Y.$$

Эта величина называется N -мерным поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в Y . Поперечники характеризуют минимальную погрешность, которая возможна при приближении всевозможными n -мерными подпространствами.

Пусть $\mathbf{e}^N = (e^1, ..., e^N)$ – система независимых линейных функционалов из фиксированного множества $M_N \subset Y^*$. И.Ф. Шарыгиным [1] и С.А.Смоляком [2] введены величины

$$\lambda_N(M_N, \mathfrak{M}, Y) = \inf_{\mathbf{e}^N\in M_N} \sup_{\substack{y,x\in\mathfrak{M}\\ \mathbf{e}^N(x)=\mathbf{e}^N(y)}} \|x - y\|_Y, \tag{1}$$

которые характеризуют минимальную погрешность при восстановлении элементов из $\mathfrak{M}$ по некоторому классу линейной информации из M_N в пространстве Y . Известно [3], что когда $\mathfrak{M}$ – центрально-симметрическое множество, верно соотношение $d_N(\mathfrak{M}, Y) \leqslant \lambda_N(M_N, \mathfrak{M}, Y)$.

Если минимизировать приближение множества $\mathfrak{M}$ суммами Фурье по системам из M , то приходим к задаче вычисления величин (см. [4])

$$d_N^{\perp}(M_N, \mathfrak{M}, Y) = \inf_{\mathbf{e}^N\in M_N} \inf_{\mathbf{e}\in G(\mathbf{e}^N)} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \|x - \sum_{i=1}^{N} e^i(x) e_i\|_Y,$$

Keywords: *integrals, multiplicative transformations of functions, Furies coefficients*
2000 Mathematics Subject Classification: 41A05

здесь $G(\mathbf{e}^N)$ – множество всех дуальных базисов к $\mathbf{e}^N = (e^1, ..., e^N)$.

В работах [5], [6] и других рассматривалась следующая задача.

Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на Ω и Ω_1, соответственно. Пусть $\mathfrak{M} \subset X$ и отображение T действует $\mathfrak{M}$ из в Y.

Для каждого целого $N \geqslant 1$ через $\{\mathbf{e}^N = (e^1, ..., e^N)\}$ обозначим множество всевозможных из наборов N линейных функционалов $e^j(\cdot) : X \longrightarrow C, (j = 1, ..., N)$ и $\{\varphi_N\}$ – множество функций $\varphi_N(\tau_1, ..., \tau_N; y) : C^N \times \Omega_1 \longrightarrow C$. Пусть $\epsilon > 0$, $D_N \subset \{\mathbf{e}^N\}\}$.

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величин

$$\delta_N(D_N; T, \mathfrak{M})_Y = \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \|Tf - \varphi_N(e^1(f), ..., e^N(f); \cdot)\|_Y, \tag{2}$$

$$\delta_{N,\epsilon}(D_N; T, \mathfrak{M})_Y = \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{\varphi_N\}} \sup_{f \in F} \sup_{|e^j(f) - z_j| \leqslant \epsilon} \|Tf - \varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)\|_Y.$$

Естественно возникает вопрос о связи этой задачи с классическими постановками. Следующее утверждение показывает эту связь.

Теорема 1. *Пусть X – функциональное пространство, вложенное в банахово пространство Y, T – линейный непрерывный оператор из X в Y. Пусть $\mathfrak{M} \subset X, Z = \{f \in X : \|Tf\|_Y < \infty\}$, тогда имеют место оценки*

$$\frac{1}{2}\lambda_N(D_N, \mathfrak{M}, Z) = \frac{1}{2} \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \sup_{\substack{y, x \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{e}^N(g) = \mathbf{e}^N(f)}} \|f - g\|_Z \leqslant \delta_N(D_N; T, \mathfrak{M})_Y \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\mathbf{e} \in G(\mathbf{e}^N)} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - \sum_{i=1}^N e^i(f) e_i\|_Z = d_N^{\perp}(D_N, \mathfrak{M}, Z), \tag{3}$$

где $\|f\|_Z = \|Tf\|_Y$.

Если $Y = L_q[0,1]^n, 2 \leqslant q \leqslant \infty, q' = q/q - 1$, $Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f, \psi_k)\psi_k(x)$ – мультипликативное преобразование по некоторой ортогональной системе $\{\psi_k\}_k$, ограниченной в совокупности, то

$$\delta_{N,\epsilon}(D_N; T, \|f\|_X \leqslant 1)_{L_q} \leqslant \inf_{\mathbf{e}^N \in D_N} \inf_{\{c_{kj}\}} \left(\sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \|Tf - \sum_{k=1}^N \mu_k \left(\sum_{j=1}^N e^j(f) c_{kj} \right) \psi_k\|_{L_q} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^N \left(|\mu_k| \sum_{j=1}^N |c_{kj}| \right)^{q'} \right)^{1/q'} \right).$$

Замечание 1. *Утверждение теоремы 1 показывает, что поперечники (1), введенные И.Ф.Шарыгиным и С.А..Смоляком, более естественные в задачах восстановления.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, из определения точной нижней грани найдутся $\mathbf{e_0}^N \in D_N, \varphi_N^0$, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), ..., e_0^N(f); \cdot)\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{(\mathbf{e}^N, \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N(e^1(f), ..., e^N(f); \cdot)\|_Y + \varepsilon. \tag{4}$$

Если

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \|Tf - \varphi_N^0(e_0^1(f), ..., e_0^N(f); \cdot)\|_Y \geqslant \frac{1}{2} \sup_{\substack{g, f \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{e}_0^N(g) = \mathbf{e}^N(f)}} \|f - g\|_Z,$$

нижняя оценка (3) получена. Положим

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|Tf-\varphi_N^0(e_0^1(f),...,e_0^N(f);\cdot)\|_Y\leqslant\frac{1}{2}\sup_{\substack{g,f\in\mathfrak{M}\\ \mathbf{e}_0^N(g)=\mathbf{e}_0^N(f)}}\|f-g\|_Z.$$

Тогда

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|Tf-\varphi_N^0(e_0^1(f),...,e_0^N(f);\cdot)\|_Y=\sup_{\substack{g,f\in\mathfrak{M}\\ \mathbf{e}_0^N(g)=\mathbf{e}_0^N(f)}}\|Tf-Tg+Tg-\varphi_N^0(e_0^1(g),...,e_0^N(g);\cdot)\|_Y\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{\substack{g,f\in\mathfrak{M}\\ \mathbf{e}_0^N(g)=\mathbf{e}_0^N(f)}}\|f-g\|_Z-\sup_{g\in\mathfrak{M}}\|Tg-\varphi_N^0(e_0^1(g),...,e_0^N(g);\cdot)\|_Y\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sup_{\substack{g,f\in\mathfrak{M}\\ \mathbf{e}_0^N(g)=\mathbf{e}_0^N(f)}}\|f-g\|_Z.$$

Учитывая (4) и произвольность выбора $\varepsilon>0,$ получим нижнюю оценку в (3).

Верхняя оценка очевидна.

Проверим второе утверждение теоремы, используя неравенство Хауздорфа Юнга.

$$\delta_{N,\epsilon}(D_N;T,\|f\|_X\leqslant 1)_{L_q}\leqslant\inf_{\mathbf{e}^N\in D_N}\inf_{\{c_{kj}\}}\left(\sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\sup_{|e^j(f)-z_j|\leqslant\varepsilon}\|Tf-\sum_{k=1}^N\mu_k\sum_{j=1}^N e^j(f)c_{kj}\psi_k\|_{L_q}+\right.$$

$$\left.+\|\sum_{k=1}^N\mu_k\sum_{j=1}^N(e^j(f)-z_j)c_{kj}\psi_k\|_{L_q}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\inf_{\mathbf{e}^N\in D_N}\inf_{\{c_{kj}\}}\left(\sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\|Tf-\sum_{k=1}^N\mu_k\sum_{j=1}^N e^j(f)c_{kj}\psi_k\|_{L_q}+\varepsilon\left(\sum_{k=1}^N\left(|\mu_k|\sum_{j=1}^N|c_{kj}|\right)^{q'}\right)^{1/q'}\right).$$

Теорема доказана.

В случаях, когда $D_N=L_N=\{\mathbf{e}^N\}$ и T – мультипликативное преобразование тригонометрических рядов Фурье (см. [22]), а пространство Y есть одно из пространств C,L_q , пространство X есть одно из пространств $W_p^\beta,B_{p\theta}^\alpha,SW_p^\beta,SB_{p\theta}^\alpha,E^\alpha$, левые и правые величины в (3) при некоторых соотношениях параметров имеют одинаковый порядок и реализуются на линейных операторах соответствующих частичных сумм тригонометрических рядов Фурье, либо сумм Вале Пусена. Поэтому из теоремы 1 и известных результатов [1]-[4] следуют соответствующие результаты работ [5]-[14], [33]-[37].

Пример 1. Если $1<p\leqslant q\leqslant 2, r>1/p-1/q$, тогда

$$\delta_N(W_p^r,L_q[0,1]^n)\sim\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{r-1/p+1/q}.$$

Действительно, известно (см. [3], [4])

$$\lambda_N(W_p^r,L_q)\geqslant d_N(W_p^r,L_q)\sim\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{r-1/p+1/q},$$

а тогда, учитывая $d_N^{\perp}(W_p^r, L_q) \leqslant c\left(\frac{\ln N}{N_r}\right)^{r-1/p+1/q}$ (см. [4]), из (3) получим нужное утверждение.

В случае $p=q=2$ получим соответствующее утверждение из [6].

2. Пусть F – некоторое функциональное пространство, являющееся собственным подпространством $C[a,b]^n$. Задача восстановления кратного интеграла сводится к нахождению таких $c_k \in \mathbb{R}^n, t_k \in [0,1)^n, k=1,2,...,M$, чтобы соответствующая квадратура

$$\sum_{k=1}^{M} c_k f(t_k) \tag{5}$$

наилучшим образом приближала интеграл $I(f)=\int_{[0,1]^n} f(y)dy$ в классе F в смысле скорости убывания погрешности

$$\delta_M(F;c,t)=\sup_{\|f\|_F=1}\left|I(f)-\sum_{k=1}^{M}c_k f(t_k)\right|$$

при стремлении параметра M к бесконечности. Число M – количество слагаемых в (5), характеризует число элементарных операций, за которое можно вычислить это выражение. Во многих случаях число слагаемых по порядку совпадает с количеством различных узлов $\{t_k\}$, используемых в (5), тогда погрешность выражают в терминах количества узлов. В противном случае погрешность следует выражать в терминах количества слагаемых M.

В 2000 г. в работе [15] была построена квадратурная формула (см. также [16]- [20]). Пусть f – 1-периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье $\sum_{r\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(r)e^{2\pi irx}$. Тогда верно равенство

$$T_{2^m}(f)-\hat{f}(0)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_l=m\\ k_j\geqslant 0}}(-1)^{\sum_{j=1}^{l-1}k_j}\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z}^l\\ r_l\neq 0}}\hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+k_1),...,r_l2^{k_l},0,...,0), \tag{6}$$

где

$$T_{2^m}(f)=\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m\\ k_i\geqslant 0}}\frac{1}{2^m}\sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+k_j)}f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}},...,\frac{r_n}{2^{k_n}}\right).$$

Данная формула решила задачу построения квадратурной формулы, в которой узлы, коэффициенты и погрешность определялись в явном виде. Квадратура $T_{2^m}(f)$ точна для полиномов со спектром из гиперболического креста порядка 2^m, которые, как хорошо известно, наилучшим образом приближают функции из пространств с доминирующей смешанной производной.

Пусть $0<\mathbf{p}=(p_1,...,p_n)\leqslant\infty,\ \ \varphi:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{R}, \varphi(x)>0$. Определим пространство $D_{\mathbf{p}}(\varphi)$, как множество функций f с абсолютно сходящимися рядами Фурье $\sum_{r\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}(r)e^{2\pi irx}$ таких, что

$$\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=\left(\sum_{k_n\in\mathbb{Z}}\cdots\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\left|\varphi(k)\hat{f}(k)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right)^{\frac{1}{p_n}}<\infty.$$

Здесь и далее при $q=\infty$ сумма $\left(\sum_k (b_k)^q\right)^{1/q}$ понимается, как $\sup_k|b_k|$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant \mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \leqslant \infty, G = \{(2^{k_1-1}(2r_1 + k_1), ..., 2^{k_l}r_l, 0, ...0) : l = \overline{1, n}, k_1 + ... + k_l = m, r \in \mathbb{Z}^l, r_l \neq 0, \}$, χ_G *– индикаторная функция множества* G *, тогда*

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1} \left|T_{2^m}(f;x) - \hat{f}(0)\right| = \left(\sum_{k_n\in\mathbb{Z}} ... \left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\chi_G(k)}{\varphi(k)}\right)^{p_1'}\right)^{\frac{p_2'}{p_1'}} ...\right)^{\frac{1}{p_n'}}.$$

Доказательство. В формуле (6) возьмем точную верхнюю грань по всем $f \in D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ с $\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)} = 1$, воспользуемся обратным неравенством Гельдера [21] и получим утверждение.

В работах [26]-[30] были введены пространства $U_s(\beta, \theta, \alpha, \psi), SW_p^\omega, F_p^\Omega, W_2^{\delta^r \log^\chi \delta}$, которые являются частными случаями пространства $D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ и оценки погрешности для соответствующих пространств являются следствиями теоремы 2.

В тезисе [26] и работе [28] анонсировано

$$\Lambda_m(f;x) = \sum_{\substack{k_1+...+k_n=m \\ k_i\geqslant\nu_i^0}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} ... \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j-1)(k_j-\nu_j^0)} f(\frac{r_1}{2^{k_1}}, ..., \frac{r_n}{2^{k_n}}). \tag{7}$$

В отличие от квадратуры $T_{2^m}(f)$ здесь введен параметр $\nu^0 \geqslant 0 : \nu_1^0 + ... + \nu_n^0 \leqslant m$. К сожалению, если $\nu^0 \neq 0$, соответствующая квадратура ухудшается. Если хотя бы одно $\nu_i^0 > 0$, то формула (7) уже не будет точной для полиномов со спектром из гиперболического креста порядка 2^m . А если $\nu^0 = \left(\left[\frac{m}{n}\right], ..., \left[\frac{m}{n}\right]\right)$, то для квадратуры (7) погрешность в классе Коробова $E_n^r = \{f : \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \bar{k}^r|\hat{f}(k)| \leqslant 1\}$ будет равна $O\left(\frac{1}{2^{\frac{rm}{n}}}\right)$.

Действительно, пусть $m = \tau n, \tau \in \mathbb{N}$, $\nu_0 = (\tau, ..., \tau)$, в качестве пробной функции достаточно рассмотреть $f(x_1, ..., x_n) = 2^{-\tau r} e^{2\pi i 2^\tau x_1}$.

Данный пример показывает, что теорема 3 из [28] не верна.

Теорема (Теорема 3, [28]). *Пусть даны числа* $s (s = 1, 2, ...), r > 1$. *Тогда* $(q = 2, 3, ...)$

$$\sup_{f\in E_n^r} \left|\int_{[0,1]^n} f(x)dx - \Lambda_q(f)\right| \underset{r,n}{\succ\prec} \frac{(\ln N)^{(r+1)(n-1)}}{N^r}, \tag{8}$$

где $\Lambda_q(f)$ *есть квадратурная формула (7), а* $N \equiv N(q) \succ\prec 2^q q^{n-1}$ *– число узлов в ней.*

Пусть $q = n\tau, \tau \in \mathbb{N}$. В качестве примера рассмотрим $\nu^0 = (\tau, ..., \tau)$, заметим, что ν^0 удовлетворяет условию $\nu_1^0 + ... + \nu_n^0 \leqslant q$. В этом случае квадратура (7) примет вид

$$\Lambda_q(f) = \frac{1}{2^q} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1^0}-1} ... \sum_{k_n=0}^{2^{\nu_n^0}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1^0}}, ..., \frac{k_n}{2^{\nu_n^0}}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m_1 2^\tau, ..., m_n 2^\tau).$$

Возьмем пробную функцию $f_0(x_1, ..., x_n) = 2^{-\tau r} e^{2\pi i 2^\tau x_1}$, тогда

$$\left|\int_{[0,1]^n} f_0(x)dx - \Lambda_q(f_0)\right| = \frac{1}{2^{\tau r}},$$

что противоречит соотношению (8).

Пусть f – функция, тригонометрический ряд Фурье которой абсолютно сходится, U – произвольное подмножество $\mathbb{Z}_+^n$, тогда для функционала

$$T_U(f) = \sum_{k\in U, k_i\geqslant\nu_i^0} \frac{1}{2^{k_1+...+k_n}} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} ... \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{i=1}^{n}(r_i+1)(k_i-\nu_i^0)} f(\frac{r_1}{2^{k_1}}, ..., \frac{r_n}{2^{k_n}}) \tag{9}$$

имеет место

$$I(f) - T_U(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus U, k_i\geqslant\nu_i^0}\ \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (k_i-\nu_i^0)}\times$$

$$\times\hat{f}(2^{k_1-1}(2r_1+(k_1-\nu_1^0)),...,2^{k_n-1}(2r_n+(k_n-\nu_n^0))). \qquad (10)$$

Эта формула при $\nu^0=0$ доказана в работе [20] как следствие формулы (6).

Замечание 2. Квадратура (9) хуже T_{2^m} даже в случае $\nu_0=(0,...,0)$ и множества U, соответствующего гиперболическому кресту. Погрешность для этих формул одна и та же, но количество слагаемых в (9) по порядку больше, чем в T_{2^m}, и соответственно количество элементарных операций для вычисления их – разная.

Аналогично имеет место

Теорема 3. *Пусть* $1\leqslant \mathbf{p}=(p_1,...,p_n)\leqslant\infty, G=\{(2^{k_1-1}(2r_1+(k_1-\nu_1^0),...,2^{k_n-1}(2r_n+(k_n-\nu_n^0)) : k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus U, k_i\geqslant\nu_i^0, r\in\mathbb{Z}^n\}$, χ_G *– индикаторная функция множества* G, *тогда*

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1}\left|T_{2^m}(f;x)-\hat{f}(0)\right| = \left(\sum_{k_n\in\mathbb{Z}}\cdots\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\chi_G(k)}{\varphi(k)}\right)^{p_1'}\right)^{\frac{p_2'}{p_1'}}\cdots\right)^{\frac{1}{p_n'}}, \qquad (11)$$

в частности, при $\mathbf{p}=(p,...,p)$

$$\sup_{\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1}\left|T_{2^m}(f;x)-\hat{f}(0)\right| =$$

$$=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus U, k_i\geqslant\nu_i^0}\ \sum_{r\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{1}{\varphi(2^{k_1-1}(2r_1+(k_1-\nu_1^0)),...,2^{k_n-1}(2r_n+(k_n-\nu_n^0)))}\right)^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Доказательство. В формуле (10) возьмем точную верхнюю грань по всем $f\in D_{\mathbf{p}}(\varphi)$ с $\|f\|_{D_{\mathbf{p}}(\varphi)}=1$, воспользуемся обратным неравенством Гельдера [21] и получим (11).

Результаты работ [26]-[30] сразу следуют из соотношения (11). Отметим, что даже частная реализация соотношения (11) есть более точный результат, чем в упомянутых работах, т.к. в них приведены двусторонние, либо односторонние оценки вместо равенства.

3. Пусть $f\in L_1[0,1]^n$, $f\sim\sum_{k\in Z^n}\hat{f}(k)e^{ikx}$, $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Определим мультипликативное преобразование

$$f_\lambda=\sum_{k\in Z^n}\lambda_k\hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Пусть (X,Y) – пара функциональных пространств 1-периодических функций, X вложено в $C[0,1]^n$, последовательность комплексных чисел $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ является мультипликатором из пространства X в пространство Y, т.е. верно

$$\sup_{f\neq 0}\frac{\|f_\lambda\|_Y}{\|f\|_X}<\infty.$$

Задача заключается в нахождении узлов $\{t_k\}_{k=1}^M$ и функций $\{\phi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^M$, чтобы скорость убывания погрешности

$$\sup_{\|f\|_X=1}\|f_\lambda-\sum_{k=1}^M f(t_k)\phi_k(x,\lambda)\|_Y$$

в метрике Y была возможно большей при возрастании M.

Данная постановка задачи объединяет задачи приближенного восстановления интегралов, коэффициентов Фурье, функций, дробных производных, дробных интегралов.

Так, если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (0,...,0) \ , \\ 0 & \text{при } k \neq (0,...,0) \ , \end{cases}$$

то это – задача численного интегрирования.

Если

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = (\mu_1,...,\mu_n) \ , \\ 0 & \text{при } k \neq (\mu_1,...,\mu_n) \ , \end{cases}$$

то соответствующий оператор восстанавливает коэффициенты Фурье $\hat{f}(\mu)$.

Если $\lambda = \{\bar{k}^{\beta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\beta = 0$, то приходим к задаче восстановления функций, если $\beta > 0$ – дробной производной, если $\beta < 0$ – дробного интеграла.

В статьях [22]-[25] вводится оператор восстановления мультипликативных преобразований

$$F_{2^m}(f,\lambda;x) = \sum_{\substack{k_1+...+k_n=m+1 \\ k_i\geqslant 0}} \sum_{0\leqslant r<2^k} f(\frac{r}{2^k})\phi_{kr}(x+\frac{r}{2^k};\lambda),$$

здесь

$$\phi_{kr}(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\nu_1+...+\nu_n\leqslant m+1 \\ 0\leqslant\nu_i\leqslant k_i}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+1)(k_j-\nu_j)} \sum_{\mu\in\rho(\nu)} \lambda_\mu e^{2\pi i\mu x}.$$

Данный оператор восстановления является точным для полиномов со спектром из соответствующего гиперболического креста.

Теорема 4 ([23]). *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, $f \in SW_p^{\alpha}[0,1]^n$, $\alpha > \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, *последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in Z^n}$ *такова, что ряд*

$$\sum_{\mu\in Z^n} \left|\lambda_\mu \bar{\mu}^{-\alpha}\right|^r$$

сходится. Тогда имеет место оценка

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f,\lambda;\cdot)\|_{L_q} \leqslant C_{q,\alpha}\left[\frac{1}{2^{\alpha m}}\left(\sum_{s=0}^{m}(m+1-s)^{\frac{(n-1)r}{p}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{\nu_1+...+\nu_n=s}\sum_{k\in\rho(\nu)}|\lambda_k|^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{\mu\in Z^n\setminus G_m}|\lambda_\mu\mu^{-\alpha}|^r\right)^{1/r}\right]\|f\|_{W_p^{\alpha}},$$

где $\rho(\nu) = \{k = (k_1,...,k_n) \in \mathbb{Z}^n : (\nu_i - 1)2^{\nu_i-2} < |k_i| \leqslant 2^{\nu_i-1}, \ i = 1,...,n\}$.

В работах [5], [33]-[37] рассматриваются вопросы численного восстановления решений различных задач математической физики. Эти задачи сводятся к приближенному вычислению конкретных мультипликативных преобразований (степенного вида). Утверждения типа теоремы 4 (см. [23]) решают эти задачи в общем виде.

Пример 2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty, r > \frac{1}{h} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, f \in W_p^r[0,2\pi]$. Уравнение Лапласа в круге

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = 0, 0 \leqslant \alpha < R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$U(\alpha,\theta)\,|_{\alpha=R} = f(\theta)$$

имеет решение

$$U(\alpha,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(\frac{\alpha}{R})^{|m|}\hat{f}(m)e^{im\theta}. \tag{12}$$

Как видим, это есть мультипликативное преобразование функции f с $\lambda_m=(\frac{\alpha}{R})^m$. Из теоремы 5 имеем

$$\sup_{0<\alpha<R}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\|U(\alpha,\theta)-F_{2^m}(f,\lambda)\|_{L_q}\leqslant c_1\sup_{0<\alpha<R}\left[\frac{1}{2^{mr}}\left(\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu}(\frac{\alpha}{R})^h\right)^{\frac{1}{h}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{\mu>2^m}\left|(\frac{\alpha}{R})\mu^{-r}\right|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right]\|f\|_{W_p^r}=c_1\left[\frac{1}{2^{mr}}\left(\sum_{\nu=0}^{m}2^{\nu-1}\right)^{\frac{1}{h}}+\left(\sum_{\mu>2^m}\mu^{-rh})\right)^{\frac{1}{h}}\right]\approx\frac{1}{2^{rm-\frac{1}{h}}}.$$

Таким образом, для $\delta_{2^m}(W_p^r)_{L_q}$ (см. [12])– погрешности наилучшего метода приближения решения (12) по значениям в точках – верно

$$\delta_N(W_p^r)_{L_q}\leqslant c\frac{1}{2^{rm-\frac{1}{h}}}.$$

Снизу $\delta_{2^m}(W_p^r)_{L_q}$ оценивается поперечником $\lambda_{2^m}(M_{2^m}W_p^r,L_q)\sim\frac{1}{2^{rm-\frac{1}{h}}}$.

Из этого примера при $p=2,q=\infty$ следуют результаты работы [12].

Из теоремы 4 следуют более сильные утверждения, чем соответствующие утверждения из [5], [33]-[37], т.к. здесь оператор приближения построен в явном виде и не требует дополнительных вычислений.

Позже были анонсированы работы [38]-[42], в которых также рассматривается задача восстановления функций, их мультипликативных преобразований и получены схожие результаты. К сожалению, сравнить эти результаты с имеющимися не представляется возможным, т.к. в этих работах оператор восстановления содержит компоненты, которые не определены, или вовсе отсутствует сам оператор восстановления. По-видимому, формат этих публикаций не позволил ее авторам сделать ссылки на ранее опубликованные с доказательствами работы [22]-[25].

Цитированная литература

1. **Шарыгин И. Ф.** // Оценки снизу теории интегрирования и приближения на классх функций. Автореф. канд. дис. МГУ, 1965.

2. **Смоляк С. А.** // Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Автореф. канд. дис. МГУ, 1965.

3. **Тихомиров В. М.** // Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.

4. **Темляков В.Н.** //Труды МИРАН. 1986. 178.

5. **Темиргалиев Н.** // Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. //Вестн.ЕНУ. 1997. № 3. С. 90–144.

6. **Темиргалиев Н. Ажгалиев Ш.** // Математические заметки. 2003. Т. 73, вып.6. С. 803–812.

7. **Берикханова М.Г.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 30–31.

8. **Ажгалиев Ш.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск 2003. С. 57–58

9. **Биахметов А., Бухарова А., Таугынбаева Г.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 63.

10. **Ибатулин И.Ж.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 65–66.

11. **Темиргалиев Н., Борушевский С.** // Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 63–64.

12. **Берикханова М.Е.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 79.

13. **Берикханова М.Е.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 80.

14. **Баилов Е.А., Ажгалиев Ш., Ташатов Н.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 60.

15. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, вып 6. С. 153–154.

16. **Тлеуханова Н.Т.** //Сб. докладов VI Сибирского Конгресса ИНПРИМ. 2000. Новосибирск, 2000. С. 238

17. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** //Кубатурные формулы и их приложения. Сб.тр. VI междунар.семинар-совещания. Уфа. 2001. С. 209

18. **Тлеуханова Н.Т.** // Совр. методы теории функций и смежные проблемы.:сб. докл. Саратовской зимней математической школы. Саратов, 2002. С. 162.

19. **Тлеуханова Н.Т., Нурсултанов Е.Д.** // Математический Сборник. 2003. Т.124, № 10. С. 133–160.

20. **Тлеуханова Н.Т.** // Евразийский математический журнал. Астана, 2004. № 1. С. 71–87.

21. **Бесов О.В., Ильин В.А., Никольский С.М.** // Интегральное представление функций и теоремы вложений. М., 1974.

22. **Тлеуханова Н.Т.** // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 3. С. 79–88.

23. **Тлеуханова Н.Т.** // Доклады РАН. 2003. Т. 390, № 2. С. 169–171.

24. **Тлеуханова Н.Т.** // Современные проблемы математики.:сб.трудов межд. конф. Астана, 2002. С. 55–58.

25. **Тлеуханова Н.Т.** // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып.1. С. 154–156.

26. **Темиргалиев Н.** // Симпозиум: Ряды Фурье и их приложения. Новоросийск, 2002. С. 51.

27. **Темиргалиев Н.** // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева. 2002. № 3-4. С. 222–272.

28. **Темиргалиев Н.** // Доклады РАН. 2003. Т.393, № 5, С. 605–608.

29. **Бекеманова А.А.** //Тезисы межд. конф. „Теория функций, функциональный анализ и их приложения“. Семипалатинск, 2003. С. 61–62.

30. **Бекеманова А.А.** // Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С.74.

31. **Фролов К.К.** Квадратурные формулы на классах функций. Канд.дисс. ВЦ АН СССР. 1979.

32. **Шарыгин И.Ф.** // Ж. выч. матем и матем. физики. 1963. Т. 3. С. 370–376.

33. **Баилов Е.А.** Приближенные интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона. Канд.дисс. Алматы, 1998.

34. **Шерниязов К.Е.** Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределениями начальных температур из классов E, SW и B. Канд.дисс. Алматы, 1998.

35. **Ажгалиев Ш.У.** Приближенное восстановление по линейной информации функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов W, B, SW и E. Канд.дисс. Алматы, 2000.

36. **Шангиреев Е.И.** О восстановлении решений волнового уравнения. Канд.дисс. Алматы, 2001.

37. **Ташатов Н.** Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW. Канд.дисс. Алматы, 2001.

38. **Темиргалиев Н., Борушевский С.И., Шерниязов К.Е.** // Тезисы докладов межд. конф. „Проблемы современной математикм и механики“. 2005. С. 23–24.

39. **Темиргалиев Н., Кудайбергенов С., Санабаев К., Шерниязов К.Е.** // Тезисы докладов межд. конф. „Проблемы современной математикм и механики“. 2005.

40. **Темиргалиев Н.** // Межд. конф. „Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ“. Москва, 2005. С. 222.

41. **Темиргалиев Н.** //Тезисы докладов 10 межвуз. конф. 2004. С. 251.

42. **Темиргалиев Н.** // Тезисы межд. конф. „Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры“. Актобе, 2006.

Поступила в редакцию 27.12.2006г.