УДК 517.51

Е. Д. Нурсултанов

Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литлвуда

В работе исследуются свойства суммируемости тригонометрических рядов Фурье в L_p пространствах. Получены неравенства, которые в некотором смысле являются обратными к неравенствам Харди–Литлвуда.

Библиография: 10 названий.

Хорошо известна теорема Харди–Литлвуда.

Пусть $p \geqslant 2$, последовательность чисел $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ такова, что для ее невозрастающей перестановки $a^* = \{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} a_k^{*p}, \tag{1}$$

тогда ряд $\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{imx}$ сходится к некоторой функции f в пространстве $L_p[0,2\pi]$ и верно неравенство

$$\|f\|_{L_p}^p \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} a_k^{*p} = C\|a\|_{l_{p'p}}^p. \tag{2}$$

И если $p \geqslant 2$, f – из пространства Лоренца $L_{p'p}[0,2\pi)$, то последовательность ее коэффициентов Фурье принадлежит l_p, и имеет место неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^p \leqslant \int_0^{2\pi} t^{p-2} f^{*p}(t)\,dt, \tag{3}$$

здесь f^* – невозрастающая перестановка f.

Данное утверждение в некотором смысле является альтернативой равенству Персеваля в пространстве L_p. Так, если рассматривать функции с монотонными коэффициентами [1] либо квазимонотонными коэффициентами [2], то неравенство (2) обращается, т.е. для функции f с монотонными либо квазимонотонными коэффициентами сходимость ряда (1) эквивалентна $f \in L_p$. В многомерном случае для рядов вида $\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty} a_{k_1,\dots,k_n}\exp\bigl(i\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\bigr)$ с коэффициентами $a_{k_1,\dots,k_n}$, монотонными по каждому переменному индексу k_j, обращение неравенства (2) доказано М. И. Дьяченко [3], [4].

В то же время, в общем случае из принадлежности функции f пространству L_p, $p > 2$, вообще говоря, не следует сходимость ряда (1). Возникает вопрос: какие условия являются необходимыми для принадлежности функции f пространству L_p, т.е. – проблема получения нижних оценок для $\|f\|_{L_p}$ через ряды вида (1).

Этой и аналогичной задаче, связанной с обращением соотношения (3), посвящена данная работа. В частности, из теоремы 4 следует, что если $p \geqslant 2$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ и $f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{imx}$, имеет место неравенство

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2}\cdots k_n^{p-2}\bar{a}_{k_1,\dots,k_n}^p \leqslant c_p\|f\|_{L_p}^p,$$

здесь

$$\bar{a}_{k_1,\dots,k_n} = \frac{1}{(k_1+1)\cdots(k_n+1)}\Bigg|\sum_{\substack{|m_j|\leqslant k_j\\ m\in\mathbb{Z}^n}} a_m\Bigg|.$$

Заметим теперь, что если последовательность $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ удовлетворяет условию

$$|a_m| \leqslant c\frac{1}{|Q_m|}\Bigg|\sum_{k\in Q_m} a_k\Bigg|,$$

$$Q_m = \big\{k\in\mathbb{Z}^n : 0\leqslant k_j \operatorname{sign} m_j \leqslant |m_j|,\ j=1,2,\dots,n\big\},$$

которое назовем условием обобщенной монотонности в $\mathbb{Z}^n$, то из упомянутого предложения следует, что для функции f с обобщенно монотонными коэффициентами $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ имеет место обращение неравенства Харди–Литлвуда:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} m_1^{p-2}\cdots m_n^{p-2}|a_m|^p \leqslant c\|f\|_p^p.$$

Условие обобщенной монотонности является более слабым, чем монотонность [1], [4] и квазимонотонность [2].

В случае $1<p<2$ Ф. Мориц [5] доказал, что для кратных рядов с монотонными коэффициентами ($\Delta a_{m_1,\dots,m_n} \geqslant 0$) неравенство Харди–Литлвуда обращается. Если же коэффициенты рядов монотонны по каждому индексу, то, как показал М.И. Дьяченко [6], для таких рядов верхняя оценка в форме Харди–Литлвуда не имеет места.

В первых двух параграфах строится аппарат исследования, вводятся "сетевые пространства", изучаются их интерполяционные свойства. Полученные интерполяционные теоремы используются в доказательстве основных результатов.

Автор выражает благодарность О.В. Бесову за внимание к работе и полезные советы.

§ 1. Сетевые пространства

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана n-мерная мера Лебега μ, M – фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем M будем называть "*сетью*". Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M, определим функцию

$$\bar{f}(t,M) = \sup_{\substack{e\in M\\ |e|>t}} \frac{1}{|e|}\bigg|\int_e f(x)\,d\mu\bigg|,$$

где точная верхняя грань берется по всем $e\in M$, мера которых $|e| \overset{\text{def}}{=} \mu e > t$, $t\in(0,\infty)$. В случае $\sup\{|e| : e\in M\} = \alpha < \infty$ и $t>\alpha$ положим $\bar{f}(t,M)=0$. Функция $\bar{f}(t,M)$ называется *средней функцией* для f по сети M.

Через $N_{p,q}(M)$, $0 < p,q \leqslant \infty$, обозначим множество функций f, для которых при $q < \infty$

$$\|f|N_{pq}(M)\| = \left(\int_0^\infty (t^{1/p}\bar{f}(t,M))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|f \mid N_{p\infty}(M)\| = \sup_{t>0} t^{1/p}\bar{f}(t,M) < \infty.$$

Замечание 1. Сетевое пространство $N_{pq}(M)$ является квазинормированным пространством (при $q \geqslant 1$ – нормированным) как факторпространство по ядру $\left\{f : \int_e f(x)\,dx = 0,\ e \in M\right\}$.

Замечание 2. Пространства $N_{pq}(M)$, вообще говоря, не являются симметричными пространствами.

Пример 1. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $1 < p,q < \infty$. Функция $f(x) = (-1)^{[x]}$ ($[x]$ – целая часть x) принадлежит $N_{p,q}(M)$, но $|f| \notin N_{p,q}(M)$.

Замечание 3. Пространства $N_{pq}(M)$ в некоторой степени чувствительны к распределению осцилляций, особенностей функций.

Пример 2. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $f_\Omega(x)$ – характеристическая функция множества $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, a_k+1]$. Последовательность $\{a_k\}$ задает распределение осцилляций функции $f_\Omega(x)$. Если $a_k = b + (k \ln^{1/q} k)^{p'}$, то $f_\Omega \in N_{pq+\varepsilon}(M)$ для любого $\varepsilon > 0$, но $f_\Omega \notin N_{pq}(M)$.

Отметим некоторые свойства пространств N_{pq}.

Утверждение 1. *Пусть $1 < p < \infty$, M – множество всех компактов из области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$N_{pq}(M) = L_{pq}(\Omega),$$

т.е. N_{pq} совпадает с пространством Лоренца.

Доказательство. Известно [7], что норма функции f в пространстве $L_{pq}(\Omega)$ эквивалентна величине

$$\begin{array}{ll} \left(\displaystyle\int_0^{|\Omega|} (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{при} \quad 1 < p < \infty, \quad q < \infty; \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) & \text{при} \quad 1 < p \leqslant \infty, \quad q = \infty, \end{array}$$

где

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds = \sup_{|e|=t} \frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|\,dx.$$

Таким образом, доказываемое утверждение будет следовать из оценок

$$\bar{f}(t,M) \leqslant f^{**}(t) \leqslant 4\bar{f}(t/3,M), \tag{3'}$$

справедливость которых покажем.

Пусть $t \in (0,\infty)$, тогда для произвольного компакта $e \in M$, мера которого равна t, и для функции $f(x)$ определим множества

$$\omega_1 = \{x \in e : f(x) \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \{x \in e : f(x) < 0\}.$$

Тогда
$$\int_e |f(x)|\,dx = \int_{\omega_1} f(x)\,dx - \int_{\omega_2} f(x)\,dx \leqslant 2\max\biggl\{\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr|, \biggl|\int_{\omega_2} f(x)\,dx\biggr|\biggr\}.$$
Для определенности будем считать, что
$$\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| \geqslant \biggl|\int_{\omega_2} f(x)\,dx\biggr|.$$
Возможны два случая: 1) $|\omega_1| \geqslant \frac{1}{2}|\omega_2|$; 2) $|\omega_1| < \frac{1}{2}|\omega_2|$.

В первом случае
$$|\omega_1| \geqslant \frac{1}{2}|\omega_2| \geqslant \frac{|e|}{3} = \frac{t}{3}\,,$$
$$\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|\,dx \leqslant 2\frac{1}{|e|}\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| \leqslant 2\frac{1}{|\omega_1|}\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| \leqslant 2\bar{f}\Bigl(\frac{t}{3}, M\Bigr). \tag{4}$$

Во втором случае $|\omega_1| < \frac{1}{2}|\omega_2|$, т.е. $|\omega_2| > \frac{2|e|}{3} = \frac{2}{3}t$. Тогда найдутся такие ω_2^1 и ω_2^2 из M, что $|\omega_2^1 \bigcap \omega_2^2| = 0$, $\omega_2^1 \bigcup \omega_2^2 = \bar{\omega}_2$, $|\omega_2^i| = \frac{|\omega_2|}{2} > \frac{t}{3}$.

Учитывая знакоопределенность функции f на ω_2, получим
$$\begin{aligned}\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| &\geqslant \biggl|\int_{\omega_2} f(x)\,dx\biggr| = \biggl|\int_{\omega_2^1} f(x)\,dx\biggr| + \biggl|\int_{\omega_2^2} f(x)\,dx\biggr| \\ &\geqslant 2\min\biggl(\biggl|\int_{\omega_2^1} f(x)\,dx\biggr|, \biggl|\int_{\omega_2^2} f(x)\,dx\biggr|\biggr) = 2\biggl|\int_{\omega_2^{i_0}} f(x)\,dx\biggr|.\end{aligned}$$
Здесь $\omega_2^{i_0}$ – компакт, где достигается минимум.

Пусть теперь $\omega = \omega_1 \bigcup \omega_2^{i_0}$, тогда $|\omega| > \frac{|e|}{3}$ и
$$\begin{aligned}\biggl|\int_{\omega} f(x)\,dx\biggr| &= \biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx + \int_{\omega_2^{i_0}} f(x)\,dx\biggr| \\ &\geqslant \biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| - \biggl|\int_{\omega_2^{i_0}} f(x)\,dx\biggr| \geqslant \frac{1}{2}\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr|.\end{aligned}$$
Следовательно,
$$\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|\,dx \leqslant 2\frac{1}{|e|}\biggl|\int_{\omega_1} f(x)\,dx\biggr| \leqslant 4\frac{1}{|\omega|}\biggl|\int_{\omega} f(x)\,dx\biggr| \leqslant 4\bar{f}\Bigl(\frac{t}{3}, M\Bigr),$$
что вместе с (4) завершает доказательство правого неравенства $(3')$. Покажем левую оценку $(3')$.
$$\begin{aligned}\bar{f}(t, M) &= \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\biggl|\int_e f(x)\,dx\biggr| \leqslant \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|\,dx \\ &= \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\int_0^{|e|} f^*(s)\,ds = \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\biggl(\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^{|e|} f^*(s)\,ds\biggr) \\ &\leqslant \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\biggl(\int_0^t f^*(s)\,ds + (|e|-t)\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\biggr) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \\ &= \sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|\,dx = f^{**}(t).\end{aligned}$$

Утверждение 2. a) *Если* $M_1 \subset M_2$, *то* $N_{pq}(M_2) \hookrightarrow N_{pq}(M_1)$.

b) *При* $1 \leqslant q \leqslant q_1$ $\;N_{pq}(M) \hookrightarrow N_{pq_1}(M)$.

c) *Если* M *– сеть такая, что* $\sup_{e\in M}|e| = \alpha < \infty$, *то при* $0 < p < p_1 \leqslant \infty$, $0 < q, q_1 \leqslant \infty$ *верно* $N_{p_1q_1}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Доказательство. a) Непосредственно следует из определения сетевых пространств.

b) Пусть $1 \leqslant q < q_1 < \infty$. Используя монотонность $\bar f(t, M)$ и обобщенное неравенство Минковского, при $\varepsilon > 0$ получим

$$\begin{aligned}\|f \mid N_{pq_1}(M)\| &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\bar f(t)\right)^{q_1}\frac{dt}{t}\right)^{1/q_1}\\ &\leqslant c_1\left(\int_0^\infty t^{-\varepsilon q_1}\left(\int_0^t \left(s^{1/p+\varepsilon}\bar f(s)\right)^q\frac{ds}{s}\right)^{q_1/q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q_1}\\ &\leqslant c_1\left(\int_0^\infty \left(s^{1/p+\varepsilon}\bar f(s)\right)^q\left(\int_s^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon q_1}}\right)^{q/q_1}\frac{ds}{s}\right)^{1/q} = c\|f\|_{N_{pq}(M)}.\end{aligned}$$

Здесь константы c и c_1 зависят только от параметров p, q, ε.

В случае $q_1 = \infty$

$$\|f\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p}\bar f(t) \leqslant \sup_{t>0}\left(\frac{q}{p}\int_0^t s^{q/p-1}\bar f(s)^q\,ds\right)^{1/q} = c\|f\|_{N_{pq}(M)}.$$

c) Учитывая свойство b), достаточно показать, что $N_{p_1\infty}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$. Поскольку $\bar f(t) = 0$ при $t > \alpha = \sup_{e\in M}|e|$, то

$$\begin{aligned}\|f\|_{N_{pq}(M)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\bar f(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^\alpha \left(t^{1/p}\bar f(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\ &\leqslant \sup_{t>0} t^{1/p_1}\bar f(t)\left(\int_0^\alpha t^{(\frac1p-\frac1{p_1})q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q} = c\|f|N_{p_1\infty}\|.\end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Определим теперь сетевые пространства последовательностей $\mathbf{n}_{pq}(M)$. Пусть S – множество всех конечных наборов индексов из $\mathbb{Z}^n$. Для фиксированного множества $M \subset S$ определим пространство $\mathbf{n}_{pq}(M)$ $(0 < p, q \leqslant \infty)$ как множество последовательностей $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ с квазинормой при $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{pq}(M)} = \left(\sum_{k=1}^\infty k^{\frac qp-1}(\bar a_k(M))^q\right)^{1/q},$$

и при $q = \infty$, $0 < p \leqslant \infty$

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{pq}(M)} = \sup_{1\leqslant k<\infty} k^{1/p}\bar a_k(M),$$

где

$$\bar a_k(M) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\substack{e\in M\\ |e|>k}} \frac{1}{|e|}\left|\sum_{m\in e} a_m\right|;$$

здесь $|e|$ – количество индексов в e.

Для введенного пространства верны все аналогичные утверждения, приведенные для пространств N_{pq}.

§ 2. Интерполяционные свойства сетевых пространств

Пусть (A_0,A_1) – совместимая пара банаховых пространств [8].

$$K(t,a;A_0,A_1)=\inf_{a=a_0+a_1}\big(\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}\big),\qquad a\in A_0+A_1,$$

– функционал Петре.

При $1\leqslant q<\infty$, $0<\theta<1$

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=\left\{a\in A_0+A_1:\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\left(\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty}=\left\{a\in A_0+A_1:\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,a)<\infty\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant p_0<p_1<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, M – произвольная сеть в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\big(N_{p_0q_0}(M),N_{p_1q_1}(M)\big)_{\theta q}\hookrightarrow N_{pq}(M),$$

где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$.

Доказательство. В силу вложений $N_{p_iq_i}\hookrightarrow N_{p_i\infty}$, $i=0,1$, достаточно показать отношение $(N_{p_0\infty}(M),N_{p_1\infty}(M))_{\theta q}\hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Пусть $t\in(0,\infty)$, $f=f_0+f_1$, $f_0\in N_{p_0\infty}$ и $f_1\in N_{p_1\infty}$. Очевидно,

$$\bar f(t,M)\leqslant\bar f_0(t,M)+\bar f_1(t,M)$$

и тогда, если обозначить $v(t)=t^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$, то

$$\begin{aligned}\sup_{v\geqslant s>0}s^{1/p_0}\bar f(s)&\leqslant\sup_{s>0}s^{1/p_0}\bar f_0(s,M)+\sup_{v>s}s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1}}\bar f_1(s,M)\\&\leqslant\sup_{s>0}s^{1/p_0}\bar f_0(s,M)+t\sup_{s>0}s^{1/p_1}\bar f_1(s,M).\end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $f=f_0+f_1$, имеем

$$\sup_{v\geqslant s>0}s^{1/p_0}\bar f(s)\leqslant K(f,t;N_{p_0\infty},N_{p_1\infty}).$$

Поэтому при $1\leqslant q\leqslant\infty$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\big(t^{-\theta}K(f,t)\big)^q\frac{dt}{t}&\geqslant\int_0^\infty\Big(t^{-\theta}\sup_{v\geqslant s>0}s^{1/p_0}\bar f(s,M)\Big)^q\frac{dt}{t}\\&=\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)\int_0^\infty\Big(t^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})}\sup_{t\geqslant s>0}s^{1/p_0}\bar f(s,M)\Big)^q\frac{dt}{t}\\&\geqslant\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)\int_0^\infty\big(t^{\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}}\bar f(t,M)\big)^q\frac{dt}{t}\\&=\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)\|f|N_{pq}(M)\|^q.\end{aligned}$$

В качестве следствия сформулируем интерполяционную теорему.

Следствие 1. *Пусть* $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, M – *произвольная сеть в* $\mathbb{R}^n$. *Если полуаддитивный оператор* T *такой, что*

$$\begin{aligned} T\colon A_0 &\to N_{p_0\infty} \quad \textit{с нормой} \quad D_0,\\ T\colon A_1 &\to N_{p_1\infty} \quad \textit{с нормой} \quad D_1, \end{aligned}$$

тогда $T\colon \bar{A}_{\theta q} \to N_{pq}$, *где* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, *причем* $\|T\| \leqslant cD_0^{1-\theta} D_1^{\theta}$.

Замечание 4. Аналогичные интерполяционные свойства имеют место и для дискретных сетевых пространств $n_{pq}(M)$.

Пусть $\dot{N}_{p\infty}(M) = \left\{f : \sup\limits_{\substack{e\in M\\ |e|>0}} \dfrac{1}{|e|^{1/p'}}\left|\int_e f(x)\,dx\right| < \infty\right\}$.

Очевидно, что $\dot{N}_{p\infty}(M) \hookrightarrow N_{p\infty}(M)$.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, (A_0, A_1) – *совместимая пара банаховых пространств. Если полуаддитивный оператор*

$$\begin{aligned} T\colon A_0 &\to \dot{N}_{p_0\infty}(M) \quad \textit{с нормой} \quad D_0,\\ T\colon A_1 &\to \dot{N}_{p_1\infty}(M) \quad \textit{с нормой} \quad D_1, \end{aligned}$$

то

$$T\colon A_{\theta\infty} \to \dot{N}_{p\infty}(M)$$

с нормой $\|T\| \leqslant D_0^{1-\theta} D_1^{\theta}$, *где* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$(\dot{N}_{p_0\infty}, \dot{N}_{p_1\infty})_{\theta\infty} \hookrightarrow \dot{N}_{p\infty},$$

которое доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

§ 3. Необходимые условия принадлежности $\hat{f}$ пространству Лоренца l_{pq} при $p > 2$

В данном параграфе изучаются оценки в некотором смысле обратные к неравенству (3). М. И. Дьяченко в [9] показал для кусочно-монотонных функций обращение неравенства (3).

Пусть $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$, где $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор,

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{ikx}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z}^n,$$

– коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $kx = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. Будем писать $x \leqslant y$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$, если $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, n$. Множество $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^0 \leqslant x \leqslant x^1\}$ называется *отрезком* (*параллелепипедом*) в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Q – отрезок в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}^n$, $d \in \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0\}$. Множество вида

$$Q^d_m = \bigcup_{0\leqslant k\leqslant m} (Q + kd)$$

назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{R}^n$.

Множество всех гармонических отрезков из $\mathbb{R}^n$, лежащих в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, назовем гармонической сетью в Ω. Гармоническая сеть содержит все отрезки, так как всякий отрезок является гармоническим отрезком.

Теорема 2. *Пусть $2 < p < \infty$, M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{T}^n$, M_1 – множество всех компактов в $\mathbb{T}^n$, $f \in N_{p'q}(M_1)$. Тогда имеет место оценка*

$$c_0\|f \mid N_{p'q}(M_0)\| \leqslant \|\hat{f} \mid l_{pq}\| \leqslant c_1\|f \mid N_{p'q}(M_1)\| \tag{5}$$

и, в частности,

$$c_0 \int_0^\infty t^{p-2} \bar{f}^p(t, M_0)\, dt \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^p \leqslant c_1 \int_0^\infty t^{p-2} \bar{f}^p(t, M_1)\, dt,$$

где константы c_1 и c_2 зависят только от параметра p и размерности n.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 2. *Пусть дана последовательность чисел $\{1/mr^{1/q}\}_{r=1}^{\infty}{}_{m=1}^{M}$, где $1 < q < +\infty$, тогда невозрастающая перестановка этой последовательности оценивается покоординатно последовательностью $\{c_q/n^{1/q}\}_{n=1}^{\infty}$, где c_q зависит только от q.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. При фиксированном m, $1 \leqslant m \leqslant M$, количество элементов $1/mr^{1/q}$, не меньших числа $1/n^{1/q}$, равно $[n/m^q]$ ($[x]$ – целая часть числа x). Тогда количество элементов вида $1/r^{1/q}m$, не меньших $1/n^{1/q}$, будет равно

$$\left[\frac{n}{1^q}\right] + \left[\frac{n}{2^q}\right] + \dots + \left[\frac{n}{m^q}\right] \leqslant n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^q} \leqslant 2q \cdot n.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $p \geqslant 2$, M_0 – гармоническая сеть в $T = [0, 2\pi)$. Тогда*

$$\|f \mid \dot{N}_{p'\infty}(M)\| \leqslant C\|\hat{f}\|_{l_p}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть Q – гармонический отрезок в $\mathbb{T}$. Тогда найдется отрезок Δ из $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $d \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ такой, что $Q = \bigcup_{m=0}^{k}(\Delta + dm)$, где $|\Delta| < d$, $dk \leqslant 2\pi$. Следовательно, для $f(x) = \sum_r a_r e^{irx}$ имеем[1]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{1/p}}\left|\int_Q f(t)\, dt\right| &= \frac{1}{|Q|^{1/p}}\left|\int_Q \sum_r a_r e^{irx}\, dx\right| \\
&\leqslant \sum_{r\neq 0} |a_r| \frac{1}{k^{1/p}|\Delta|^{1/p}} \left|\sum_{m=0}^{k} \int_\Delta e^{ir(x+dm)}\, dx\right| + |a_0|2\pi \\
&\leqslant \sum_{r\neq 0} |a_r| \frac{1}{k^{1/p}|\Delta|^{1/p}} \frac{|e^{idkr} - 1||e^{i|\Delta|r} - 1|}{|e^{ird} - 1|r} + |a_0|2\pi.
\end{aligned}$$

[1] Для корректности последующих рассуждений можно считать, что $a_r = 0$ при $|r| \gg 1$.

Покажем теперь, что невозрастающая перестановка последовательности $\{b_r\}$, где

$$b_r = b_r(x,y,k) = \frac{1}{(kx)^{1/p}}\left|\frac{(e^{irky}-1)(e^{irx}-1)}{(e^{iry}-1)r}\right|,$$

$0 < x < y$, $ky \leqslant 2\pi$, $k \in \mathbb{N}$, не превосходит $\{c_p/r^{1/p'}\}_{r=1}^{\infty}$, где c_p зависит только от p. Заметим, что достаточно рассмотреть последовательность $\{b_r\}_{r=1}^{\infty}$. Разобьем $\{b_r\}_{r=1}^{\infty}$ на три последовательности:

$$\{b_r\}_{r=1}^{\infty} = \{b_r\}_{1\leqslant r\leqslant \frac{\pi}{2y}} \cup \{b_r\}_{\frac{\pi}{2y}\leqslant r\leqslant \frac{\pi}{2x}} \cup \{b_r\}_{r\geqslant \frac{\pi}{2x}}.$$

При $r \leqslant \pi/2y$

$$\begin{aligned} b_r &\leqslant \frac{1}{r^{1/p'}}\left|\frac{(e^{irky}-1)(e^{irx}-1)}{(e^{iry}-1)(rkx)^{1/p}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{r^{1/p'}}\,\frac{\pi r x \min\{rky,2\}}{2(kxr)^{1/p} ry} = \frac{\pi}{2r^{1/p'}}\,\frac{x^{1/p'}\min\{rky,2\}}{k^{1/p}r^{1/p}y}\,. \end{aligned}$$

Если $\min\{rky,2\} = 2 \leqslant rky$, то

$$b_r \leqslant \frac{\pi}{2r^{1/p'}}\,\frac{2x^{1/p'}}{(rky)^{1/p}y^{1/p'}} \leqslant \frac{\pi}{2r^{1/p'}}\,\frac{2}{2^{1/p}} = \frac{\pi}{2^{1/p}}\,\frac{1}{r^{1/p'}} = \frac{C_p}{r^{1/p'}}\,.$$

Если же $\min\{rky,2\} = rky < 2$, то

$$b_r \leqslant \frac{\pi}{2r^{1/p'}}\,\frac{x^{1/p'}rky}{k^{1/p}r^{1/p}y} \leqslant \frac{\pi}{2r^{1/p'}}(rkx)^{1/p'} < \frac{\pi}{2^{1/p}}\,\frac{1}{r^{1/p'}} = \frac{C_p}{r^{1/p'}}\,.$$

Рассмотрим теперь $\{b_r\}_{r>\frac{\pi}{2x}}$, тогда

$$b_r \leqslant \frac{2|e^{irky}-1|}{(xk)^{1/p}r|e^{iry}-1|} \leqslant \frac{2|e^{irky}-1|}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/p}k^{1/p}r^{1/p'}|e^{iry}-1|}\,. \tag{7}$$

Данная вектор-функция имеет особенности в точках $ry = 2\pi l$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому выделим подпоследовательности

$$\{b_r\}_{\left\{r>\frac{\pi}{2k}\right\}\cap\bigcup_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi l}{y}\leqslant r\leqslant\frac{2\pi l+\frac{\pi}{2}}{y}\right\}}, \tag{8}$$

$$\{b_r\}_{\left\{r>\frac{\pi}{2k}\right\}\cap\bigcup_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi l-\frac{\pi}{2}}{y}\leqslant r\leqslant\frac{2\pi l}{y}\right\}}. \tag{9}$$

Оставшаяся часть последовательности $\{b_r\}_{r>\frac{\pi}{2k}}$ оценивается через последовательность $\{c/r^{1/p'}\}_{r=1}^{\infty}$. Покажем, что невозрастающая перестановка последовательности (8) оценивается через невозрастающую перестановку последовательности вида $\{4^{1/p}/ml^{1/p'}\}_{l=1}^{\infty}{}_{m=1}^{M}$.

Пусть $\dfrac{2\pi l}{y} \leqslant r \leqslant \dfrac{2\pi l+\frac{\pi}{2}}{y}$. Тогда учитывая (7), оценку

$$\frac{|e^{irky}-1|}{|e^{iry}-1|} \leqslant \min\left\{k, \frac{1}{|2\pi l - ry|}\right\},$$

а также то, что $ky \leqslant 2\pi$, получим, что $\{b_r\}_{\frac{2\pi l}{y}\leqslant r\leqslant\frac{2\pi l+\frac{\pi}{2}}{y}}$ оценивается через последовательность с элементами

$$\frac{1}{k^{1/p}\left(\frac{2\pi l}{y}\right)^{1/p'}}\left\{\min\left\{k,\frac{1}{y}\right\},\min\left\{k,\frac{1}{2y}\right\},\min\left\{k,\frac{1}{3y}\right\},\dots,\min\left\{k,\frac{1}{\frac{\pi}{2y}y}\right\}\right\}$$
$$\leqslant\frac{2\pi}{k^{1/p}\left(\frac{2\pi l}{y}\right)^{1/p'}}\left\{\frac{1}{y},\frac{1}{2y},\dots,\frac{1}{[\frac{\pi}{2y}]y}\right\}\leqslant\frac{(2\pi)^{1/p}}{(ky)^{1/p}l^{1/p'}}\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{[\frac{\pi}{2y}]}\right\}$$
$$\leqslant\frac{(2\pi)^{1/p}}{[\frac{\pi}{2}]^{1/p}l^{1/p'}}\left\{\frac{1}{m}\right\}_{m=1}^{[\frac{\pi}{2y}]}=\left\{\frac{4^{1/p}}{l^{1/p'}m}\right\}_{m=1}^{[\frac{\pi}{2y}]},$$

где $l\in\mathbb{N}$. Таким образом, последовательность (8) покоординатно мажорируется последовательностью $\{4^{1/p}/l^{1/p'}m\}_{l=1}^{\infty}{}_{m=1}^{[\frac{\pi}{2y}]}$. Тогда по лемме 2 невозрастающая перестановка (8) оценивается через $\left\{c_p/r^{1/p'}\right\}_{r=1}^{\infty}$. Подпоследовательность (9) оценивается аналогично (8).

И, наконец, рассмотрим $\{b_r\}_{\frac{\pi}{2y}<r\leqslant\frac{\pi}{2x}}$.

$$b_r\leqslant\frac{rx|e^{irky}-1|}{(kx)^{1/p}r|e^{iry}-1|}\leqslant\frac{(\frac{\pi}{2})^{1/p'}}{k^{1/p}}\,\frac{|e^{irky}-1|}{r^{1/p'}|e^{iry}-1|}\,.$$

Невозрастающая перестановка последовательности, стоящей в правой части неравенства, не превосходит невозрастающую перестановку последовательности

$$\left\{\frac{C}{r^{1/p'}m}\right\}_{r=1}^{\infty}{}_{m=1}^{k}.$$

Из леммы 2 следует, что ее невозрастающая перестановка оценивается через $\{c_p/r^{1/p'}\}_{r=1}^{\infty}$.

Таким образом, используя неравенство $\sum_{n=1}^{\infty}a_rb_r\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_r^*b_r^*$, получим

$$\frac{1}{|Q|^{1/p}}\left|\int_Q f(t)\,dt\right|\leqslant c\sum_{r=1}^{\infty}a_r^*r^{\frac{1}{p}-1}=c\|a\|_{l_{p1}}.$$

Следовательно, отображение $Ta\ \to\ f\ =\ \sum a_re^{irx}$ ограничено из l_{p1} в $\dot N_{p'\infty}$, $1<p<\infty$, а тогда по лемме 1 и в силу интерполяционных свойств пространств Лоренца

$$T\colon l_p\to\dot N_{p'\infty}(M_0).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Учитывая равенство $N_{pq}(M_1)=L_{pq}(\mathbb{T}^n)$, правое неравенство соотношения (5) следует из теоремы Харди–Литлвуда.

Для доказательства левого неравенства соотношения (5) докажем неравенство (6) в многомерном случае. Доказательство будем проводить по индукции. При $n=1$ неравенство (6) следует из леммы 3. Предположим теперь, что (6) верно для размерности $n-1$. Покажем, что оно верно для n.

Пусть Q – произвольный гармонический отрезок в $\mathbb{T}^n$. Тогда из определения гармонического отрезка, следует, что найдутся гармонические отрезки Q^1 из $\mathbb{T}$ и Q^2 из $\mathbb{T}^{n-1}$ такие, что $Q = Q^1 \times Q^2$. Если $f \sim \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} a_{\bar r} e^{irx}$, то функции

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} f(x_1, y)\, dy$$

будет соответствовать ряд Фурье

$$\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} d_{r_1} e^{ir_1x_1},$$

где

$$d_{r_1} = \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1,r} e^{iry}\, dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(x)\, dx \right| &= \frac{1}{|Q^1|^{1/p}} \left| \int_{Q^1} \frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} f(x_1, y)\, dy\, dx_1 \right| \\
&= \frac{1}{|Q'|^{1/p}} \left| \int_{Q'} \varphi(x_1)\, dx_1 \right| \leqslant C\|d\|_{l_p} = C\biggl(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} d_{r_1}^p \biggr)^{1/p} \\
&= C\biggl(\sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \biggl(\frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \int_{Q^2} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1,r} e^{iry}\, dy \biggr)^p \biggr)^{1/p},
\end{aligned}$$

но в силу предположения индукции для произвольного целого r_1

$$\frac{1}{|Q^2|^{1/p}} \left| \int_{Q^2} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} a_{r_1,r} e^{iry}\, dy \right| \leqslant c_p \biggl(\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} |a_{r_1,r}|^p \biggr)^{1/p},$$

откуда имеем

$$\frac{1}{|Q|^{1/p}} \left| \int_Q f(x)\, dx \right| \leqslant c_p \biggl(\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} |a_r|^p \biggr)^{1/p},$$

следовательно, $T\colon l_p \to \dot N_{p'\infty}(M_0)$, $1 < p < \infty$, и тем более $T\colon l_p \to N_{p'\infty}(M_0)$. Используя следствие 1, приходим к нужному результату. Теорема доказана.

Пусть M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{T}^n$. Будем говорить, что f имеет доминирующие гармонические осцилляции, если

$$\sup_{t>0} f^*(t)/\bar f(t, M_0) < \infty.$$

Множество всех таких функции f обозначим через Λ.

Следствие 2. *Пусть $1 < p < 2$, $f \in \Lambda$. Тогда для того чтобы $f \in L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat f \in l_{p'q}$.*

§ 4. Необходимые условия принадлежности функции f пространству $L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ при $p>2$

Всякую конечную арифметическую прогрессию в $\mathbb{Z}$ назовем гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}$. Множество вида $Q=B_1\times B_2\times\dots\times B_n$, где B_i – гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}^n$. Множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{Z}^n$ называется *гармонической сетью* в $\mathbb{Z}^n$.

Пусть $m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$, $d=(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{N}^n$, $r=(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{N}_0^n$, где $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Множество вида

$$Q_r^d=\bigl\{(m_1+k_1d_1,\dots,m_n+k_nd_n)\in\mathbb{Z}^n: k_i=0,1,\dots,r_i\bigr\}$$

назовем *гармоническим отрезком в* $\mathbb{Z}^n$ *с плотностью* $d=(d_1,\dots,d_n)$.

Обозначим через M^d множество всех гармонических отрезков в $\mathbb{Z}$ с плотностью d.

Введем пространство V_∞^d как множество всех измеримых функций f из $L_1(\mathbb{T})$ таких, что

$$\|f\|_{V_\infty^d}=\sup_{Q\in M^d}\biggl|\int_{\mathbb{T}^n}f(x)\sum_{k\in Q}e^{ikx}\,dx\biggr|=\sup_{Q\in M^d}\biggl|\sum_{k\in Q}\hat f(k)\biggr|<\infty.$$

Лемма 4. *Пусть* $n=1$, $0<\theta<1$, $1/p=(1-\theta)/2$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. *Тогда*

$$L_{pq}(\mathbb{T})\hookrightarrow(L_{21},V_\infty^d)_{\theta q},$$

причем

$$\|f\mid(L_{21},V_\infty^d)_{\theta q}\|\leqslant c\|f\mid L_{pq}\|,$$

где c *не зависит от* f *и* $d\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть d – плотность сети M^d, $0<\tau<2\pi$. Введем множество

$$A_\tau=\bigcup_{k=0}^{d-1}\biggl\{x\in\mathbb{T}:\frac{2\pi k}{d}-\frac{\tau}{2d}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi k}{d}+\frac{\tau}{2d}\biggr\}.$$

Мера $|A_\tau|\leqslant\tau$.

Для функции f определим

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\in(\mathbb{T}\setminus A_\tau)\text{ и } x\in\{x:|f(x)|<f^*(\tau)\},\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$
$$f_0(x)=f(x)-f_1(x).$$

Тогда функционал Петре оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}K(t,f;L_{21},V_\infty^d)&\leqslant\int_0^{2\tau}f_0^*(s)s^{-1/2}\,ds+t\int_{\mathbb{T}\setminus A_\tau}|f_1(x)|\biggl|\frac{e^{irdx}-1}{e^{idx}-1}\biggr|\,dx\\&\leqslant\int_0^{2\tau}s^{-1/2}f^*(s)\,ds+t\int_{\mathbb{T}}|f_1(x)|\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

где

$$\varphi(x)=\begin{cases}\biggl|\dfrac{e^{irdx}-1}{e^{idx}-1}\biggr| & \text{при } x\in\mathbb{T}\setminus A_\tau,\\ 0 & \text{при } x\in A_\tau.\end{cases}$$

Воспользуемся неравенством

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\,dt.$$

При этом, учитывая, что $\varphi^*(s) \leqslant 4/(\tau+s)$, получим

$$K(t,f) \leqslant 2c\biggl(\int_0^{2\tau} s^{-1/2}f^*(s)\,ds + t\int_\tau^{2\pi} f^*(s)\frac{ds}{s}\biggr).$$

Следовательно, взяв $\tau = t^2$ и последовательно проведя замены t на $t^{1/2}$ во внешних интегралах и s на st во внутренних, имеем

$$\begin{aligned}
\bigl\|f \mid (L_{21}V^d_\infty)_{\theta q}\bigr\| &= \biggl(\int_0^\infty \bigl(t^{-\theta}K(t,f)\bigr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\\
&\leqslant 2c\Biggl(\biggl(\int_0^\infty\biggl(\int_0^{t^2} t^{-\theta}f^*(s)s^{-1/2}\,ds\biggr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\\
&\quad+\biggl(\int_0^\infty\biggl(t^{1-\theta}\int_{t^2}^{2\pi} f^*(s)\frac{ds}{s}\biggr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\Biggr)\\
&\leqslant 2c\Biggl(\biggl(\int_0^\infty\biggl(\int_0^1 t^{(1-\theta)/2}f^*(st)s^{1/2}\frac{ds}{s}\biggr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\\
&\quad+\biggl(\int_0^\infty\biggl(t^{(1-\theta)/2}\int_1^{2\pi} f^*(st)\frac{ds}{s}\biggr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\Biggr)\\
&\leqslant 2c\biggl(\int_0^1\biggl(\int_0^\infty\Bigl(t^{(1-\theta)/2}f^*(st)\Bigr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}s^{1/2}\frac{ds}{s}\\
&\quad+\int_1^\infty\biggl(\int_0^\infty\Bigl(t^{(1-\theta)/2}f^*(st)\Bigr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}\frac{ds}{s}\biggr)\\
&= |st\to t|\\
&= 2c\biggl(\int_0^1 s^{\frac{\theta}{2}-1}\,ds\|f \mid L_{pq}\| + \int_1^\infty s^{-3/2+\theta/2}\,ds\|f \mid L_{pq}\|\biggr)\\
&= c_1\|f \mid L_{pq}\|,
\end{aligned}$$

где c_1 зависит только от параметра θ.

Теорема 3. *Пусть $p>2$, M_1 – множество всех компактов в $\mathbb{Z}^n$, M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$, $f=\sum_k a_k e^{ikx}$. Тогда*

$$c_0\|a \mid n_{p'q}(M_0)\| \leqslant \|f \mid L_{pq}(\mathbb{T}^n)\| \leqslant c_1\|a \mid n_{p'q}(M_1)\|. \tag{10}$$

Доказательство. Правое неравенство (10) с учетом соотношения $n_{p'q}(M_1) = l_{p'q}$ следует из неравенства Харди–Литлвуда (при $p\geqslant 2$, $\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{T}^n)} \leqslant c\|a\|_{l_{p'q}}$). Левое неравенство, как и в теореме 2, будем доказывать индуктивно. Пусть $n=1$.

Заметим сначала, что для фиксированного $d\in\mathbb{N}$ и соответствующей сети M^d

$$\|a \mid n_{22}(M_d)\| \leqslant \|a\|_{l_2} = \|f \mid L_2\| \leqslant \|f \mid L_{21}\|$$

и

$$\|a \mid n_{1\infty}(M^d)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{Q\in M^d \\ Q\geqslant k}} \left|\sum_{m\in Q} a_m\right| = \sup_{Q\in M^d} \left|\sum_{m\in Q} a_m\right| = \|f\|_{V^d_\infty}.$$

Таким образом, интерполируя эти неравенства (с учетом утверждения леммы 4), для отображения $T\colon f\to\{a_k\}$ получим

$$T\colon L_{p\infty}\to n_{p'\infty}(M^d), \qquad 2<p<\infty,$$

и верно неравенство

$$\|a \mid n_{p'\infty}(M^d)\| \leqslant c\|f \mid L_{p\infty}\|,$$

где c не зависит от d и f. Тогда, учитывая, что c не зависит от d, имеем

$$\|a \mid n_{p'\infty}(M_0)\| = \sup_{d\in\mathbb{N}} \|a \mid n_{p'\infty}(M^d)\| \leqslant c\|f \mid L_{p\infty}\|.$$

Далее, повторно применяя интерполяционную теорему, получим левое неравенство при $n=1$. Завершаем доказательство так же, как и в теореме 2.

Будем говорить, что последовательность $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ имеет доминирующие гармонические осцилляции, если $\sup_{k\in\mathbb{N}} a^*_k/\bar{a}_k(M_0) < \infty$, где M_0 – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$. Множество функции f, коэффициенты Фурье которых имеют доминирующие гармонические осцилляции, обозначим через λ. Множество λ в одномерном случае содержит функции с монотонными [1] и квазимонотонными коэффициентами [2].

Следствие 3. *Пусть $2<p<\infty$, $f\in\lambda$. Тогда для того чтобы $f\in L_{pq}(\mathbb{T}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat{f}\in l_{p'q}$.*

Следствие 4. *Пусть $1<p<2$, для последовательности комплексных чисел $\{a_m\}_{m=1}^\infty$ имеет место соотношение*

$$B = \left(\sum_{m=1}^\infty m^{2p-2}|a_m-a_{m+1}|^p\right)^{1/p} + \sup_{m>0} m^{1/p'}|a_m| < \infty.$$

Тогда $\sum_{m=1}^\infty a_m e^{inx}$ является рядом Фурье некоторой функции f на L_p и верно неравенство

$$\|f\|_{L_p} \leqslant cB,$$

где C зависит только от параметра p.

Доказательство. Пусть g – произвольная функция из $L_{p'}(-\pi,\pi]$ с рядом Фурье $\sum \hat{g}(m)e^{imx}$. Тогда, применяя неравенство Абеля, получим

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-N}^{N} a_m e^{imx} g(x)\,dx = \sum_{m=1}^{N} a_m\hat{g}(m) \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} m(a_m-a_{m+1})\,\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\hat{g}(k) + a^N\sum_{m=1}^{N}\hat{g}(m).\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и теоремой 2

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx \\
&\quad\leqslant \biggl(\sum_{m=1}^{N-1} m^{2p-2}|a_m-a_{m+1}|^p\biggr)^{1/p}\biggl(\sum_{m=1}^{N-1} m^{p'-2}\biggl(\frac{1}{m}\biggl|\sum_{k=1}^{m}\hat g(k)\biggr|\biggr)^{p'}\biggr)^{1/p'} \\
&\qquad+\sup_{m>0} m^{1/p'}|a_m|\|\hat g \mid n_{p\infty(M_0)}\| \\
&\quad\leqslant C\biggl[\biggl(\sum_{m=1}^{N-1} m^{2p-2}|a_m-a_{m+1}|^p\biggr)^{1/p}+\sup_{m>0} m^{1/p}|a_m|\biggr],
\end{aligned}$$

$$\|g \mid n_{pp'}(M_0)\| \leqslant cB\|g\|_{L_{p'}}.$$

Таким образом, для любого N

$$\biggl\|\sum_{m=1}^{N} a_m e^{imx}\biggr\|_p=\sup_{g\neq 0}\frac{\bigl|\int_{-\pi}^{\pi} S_N(x)g(x)\,dx\bigr|}{\|g\|_{p'}}\leqslant cB.$$

Откуда по критерию сходимости частичных сумм следует искомое утверждение.

§ 5. Необходимые условия принадлежности функции f пространству $L_p(\mathbb{T}^n)$ при $p>2$

Лемма 5. *Пусть Q – гармонический отрезок в $\mathbb{Z}$, тогда невозрастающая перестановка $\varphi^*(t)$ функции*

$$\varphi(x)=\frac{1}{|Q|^{1/p}}\biggl|\sum_{k\in Q} e^{ikx}\biggr|$$

не превосходит $C_p/t^{1/p'}$, где C_p зависит лишь от параметра p.

Доказательство. Пусть $Q=\{md\}_{m=0}^{M-1}$, тогда

$$\varphi(x)=\frac{1}{M^{1/p}}\,\frac{|e^{iMdx}-1|}{|e^{idx}-1|}\,.$$

Тогда для функции распределения имеем:

$$\begin{aligned}
m(\varphi,\tau)&=\mu\bigl\{x\in[0,2\pi):\varphi(x)\geqslant\tau\bigr\}=2d\mu\biggl\{x\in\biggl[0,\frac{\pi}{d}\biggr):\varphi(x)\geqslant\tau\biggr\} \\
&\leqslant 2d\mu\biggl\{x\in\biggl[0,\frac{\pi}{d}\biggr):\frac{1}{M^{1/p}}\min\Bigl(M,\frac{1}{dx}\Bigr)\geqslant\tau\biggr\}.
\end{aligned}$$

Если $\tau>M^{1/p'}$, то

$$m(\varphi,\tau)=0\leqslant 2m(x^{-1/p'},\tau).$$

Если же $\tau < M^{1/p'}$, то

$$m(\varphi,\tau) \leqslant 2d\biggl(\frac{1}{dM} + \mu\biggl\{x \in \Bigl[\frac{1}{dM}, \frac{\pi}{d}\Bigr) : \frac{1}{(dx)^{1/p'}} \geqslant \tau\biggr\}\biggr)$$
$$\leqslant 2\biggl(\frac{1}{M} + \mu\biggl\{x \in \Bigl[\frac{1}{M}, \pi\Bigr) : \frac{1}{x^{1/p'}} \geqslant \tau\biggr\}\biggr) \leqslant 2m(x^{-1/p'}, \tau).$$

Лемма доказана.

Пусть $M_1, \dots, M_n$ – сети в $\mathbb{Z}$, $M = M_1 \times \dots \times M_n = \{e = e_1 \times \dots \times e_n : e_j \in M_j$, $j = 1, \dots, n\}$ – сеть в $\mathbb{Z}^n$, $\vec{1} \leqslant \vec{p} < \vec{\infty}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Через $n_{\vec{p}q}(M)$ обозначим множество всех последовательностей $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{\frac{q}{p_1}-1} \cdots k_n^{\frac{q}{p_n}-1} \bar{a}^q_{k_1\dots k_n}(M)\biggr)^{1/q} < \infty,$$

где $\bar{a}_{k_1\dots k_n}(M) = \sup_{\substack{e \in M \\ |e_j| > k_j}} \frac{1}{|e|} \bigl|\sum_{k \in e} \hat{f}(k)\bigr|$. Это пространство назовем *анизотропным сетевым* пространством.

Теорема 4. *Пусть $2 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{imx}$, M – гармоническая сеть в $\mathbb{Z}^n$. Тогда*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \cdots k_n^{p-2} \bar{a}^p_{k_1\dots k_n}(M) < C\|f\|_p^p,$$

т.е. $\hat{f} \in n_{\vec{p}'p}(M)$, где $\vec{p}' = (p' \dots p')$, $p' = p/(p-1)$.

Доказательство будем проводить для случая $n = 2$. Пусть $e = e_1 \times e_2$ – гармонический отрезок в $\mathbb{Z}^2$. Используя лемму 5, имеем

$$\frac{1}{|e_1|^{1/p_1}} \frac{1}{|e_2|^{1/p_2}} \biggl|\sum_{k_1 \in e_1} \sum_{k_2 \in e_2} a_{k_1k_2}\biggr|$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)| \frac{1}{|e_1|^{1/p_1}} \biggl|\sum_{k_1 \in e_1} e^{ik_1x_1} \frac{1}{|e_2|^{1/p_2}} \sum_{k_2 \in e_2} e^{ik_2x_2}\biggr| \, dx_1 \, dx_2$$
$$\leqslant 2\int_0^{2\pi} \biggl(\int_0^{2\pi} f^{*_1}(t_1x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \, dt_1\biggr)^{*_2}_{t_2} t_2^{\frac{1}{p_2}-1} \, dt_2.$$

Здесь $f^*(t_1,x_2)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x_1,x_2)$ при фиксированном x_2, а $\biggl(\int_0^{2\pi} f^{*_1}(t_1x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \, dt_1\biggr)^{*_2}_{t_2}$ – невозрастающая перестановка функции $\int_0^{2\pi} f^{*_1}(t_1x_2) t_1^{\frac{1}{p_1}-1} \, dt_1$ по переменной x_2, вычисленная в точке t_2. Следовательно, при $p' = (p_1,p_2)$

$$\|\hat{f}\|_{n_{\vec{p}\infty}} \leqslant 2\bigl\|\|f\|_{L_{p_11}}\bigr\|_{L_{p_21}}. \tag{11}$$

Пусть $p_0 < p < p_1$, $t_1, t_2 \in (0,\infty)$, $v_i = t_i^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}$, $i = 1,2$, $a = \{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2}$ – произвольный элемент $n_{\vec{p}'p}(M)$. Тогда для представления $a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}$, где

$a_{00} \in n_{p_0',p_0',\infty}(M)$, $a_{10} \in n_{p_1',p_0',\infty}(M)$, $a_{01} \in n_{p_0',p_1',\infty}(M)$, $a_{11} \in n_{p_1',p_1',\infty}(M)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\sup_{m_1 \geqslant v_1 > 0} \sup_{m_2 \geqslant v_2 > 0} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a_{r_1 r_2} \Big| \\
&\quad \leqslant \sup_{m_1 \geqslant v_1 > 0} \sup_{m_2 \geqslant v_2 > 0} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a^{00}_{r_1 r_2} \Big| \\
&\qquad + t_1^{-1} \sup_{m_1 \geqslant v_1 > 0} \sup_{m_2 \geqslant v_2 > 0} m_1^{1/p_1'} m_2^{1/p_0'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a^{10}_{r_1 r_2} \Big| \\
&\qquad + t_2^{-1} \sup_{m_1 \geqslant v_1 > 0} \sup_{m_2 \geqslant v_2 > 0} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_1'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a^{01}_{r_1 r_2} \Big| \\
&\qquad + t_1^{-1} t_2^{-1} \sup_{m_1 \geqslant v_1 > 0} \sup_{m_2 \geqslant v_2 > 0} m_1^{1/p_1'} m_2^{1/p_1'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1} \sum_{r_2 \in e_2} a^{11}_{r_1 r_2} \Big| \\
&\quad \leqslant \big(\|a_{00}\|_{n_{p_0' p_0' \infty}} + t_1^{-1} \|a_{10}\|_{n_{p_1' p_0' \infty}} + t_2^{-1} \|a_{01}\|_{n_{p_0' p_1' \infty}} + t_1^{-1} t_2^{-1} \|a_{11}\|_{n_{p_1' p_1' \infty}} \big).
\end{aligned}$$

Учитывая произвольность представления $a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}$, получим

$$\begin{aligned}
&\sup_{m_i \geqslant v_i > 0} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \sup_{|e_i| \geqslant m_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e_1 \times e_2} a_r \Big| \leqslant K(t_1^{-1}, t_2^{-1}, a) \\
&\quad = \inf_{a = a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{11}} \big(\|a_{00}\|_{p_0' p_0' \infty} + t_1^{-1} \|a_{10}\|_{p_1' p_0' \infty} \\
&\qquad + t_2^{-1} \|a_{01}\|_{p_0' p_1' \infty} + t_1^{-1} t_2^{-1} \|a_{11}\|_{p_1' p_1' \infty} \big).
\end{aligned} \tag{12}$$

Функция $K(t_1, t_2, a)$ – обобщение функционала Петре [10].

Далее, используя монотонность $\bar{a}_k$ по каждому индексу, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ и доказанное неравенство (12), получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} k_1^{p-2} k_2^{p-2} \Big(\sup_{|e_i| \geqslant k_i} \frac{1}{|e|} \Big| \sum_{r \in e} a_r \Big| \Big)^p \\
&\quad = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \big(k_1^{1/p'} k_2^{1/p'} \bar{a}_{k_1 k_2} \big)^p \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \\
&\quad \leqslant \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \Big[(k_1 k_2)^{-\theta(1/p_0' - 1/p_1')} \sup_{m_i \geqslant k_i} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \bar{a}_{m_1 m_2} \Big]^p \frac{1}{k_1} \frac{1}{k_2} \\
&\quad \leqslant c_1 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \Big((t_1 t_2)^{-\theta(1/p_0' - 1/p_1')} \sup_{m_i \geqslant t_i} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \bar{a}_{m_1 m_2} \Big)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
&\quad = c_2 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \Big((t_1 t_2)^{\theta} \sup_{m_i \geqslant t_i} m_1^{1/p_0'} m_2^{1/p_0'} \bar{a}_{m_1 m_2} \Big)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
&\quad \leqslant c_2 \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \big((t_1 t_2)^{\theta} K(t_1^{-1}, t_2^{-1}, a) \big)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \\
&\quad = c_2 \int_0^1 \int_0^1 \big((t_1 t_2)^{-\theta} K(t_1, t_2, a) \big)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} ,
\end{aligned}$$

где $v_i = t_i^{\frac{p_0 p_1}{p_0 - p_1}}$. Воспользуемся теперь неравенством (11):

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}(k_1k_2)^{p-2}\bar{a}_{k_1k_2}^p \leqslant c_3\int_0^1\int_0^1\Big[(t_1t_2)^{-\theta}\inf_{f=f_{00}+f_{10}+f_{01}+f_{11}}\big(\big\|\|f_{00}\|_{p_01}\big\|_{p_11}+t_1\big\|\|f_{10}\|_{p_11}\big\|_{p_01} + t_2\big\|\|f_{01}\|_{p_01}\big\|_{p_11}+t_1t_2\big\|\|f_{11}\|_{p_11}\big\|_{p_11}\big)\Big]^p\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_2}{t_2}.$$

Пусть $w_1 = t_1^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$, $w_2 = t_2^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_2}}$. Введем обозначение:

$$g_0(x_1x_2) = \begin{cases} f(x_1x_2) & \text{при } |f(x_1,x_2)| > f^{*_1}(w_1,x_2),\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $f^{*_1}(w_1,x_2)$ невозрастающая перестановка функции $f(x_1,x_2)$, взятая по первой переменной при фиксированном x_2. Пусть $g_1(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - g_0(x_1,x_2)$. В свою очередь, каждую функцию g_0 и g_1 представим в виде

$$g_1(x_1,x_2) = f_{10}(x_1,x_2) + f_{11}(x_1,x_2),$$
$$g_0(x_1,x_2) = f_{00}(x_1,x_2) + f_{01}(x_1,x_2),$$

где

$$f_{00}(x_1,x_2) = \begin{cases} g_0(x_1,x_2) & \text{при } \|g_0(\,\cdot\,,x_2)\|_{p_01} > (\|g_0(\,\cdot\,,x_2)\|_{p_01})^{*_2}(w_2),\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_{10}(x_1,x_2) = \begin{cases} g_1(x_1x_2) & \text{при } \|g_1(\,\cdot\,,x_2)\|_{p_11} > (\|g_1(\,\cdot\,,x_2)\|_{p_11})^{*_2}(w_2),\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда, считая, что $f(x_1,x_2)$ вне $[0,2\pi)^2$ равна нулю, получим

$$\begin{aligned}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}&(k_1k_2)^{p-2}\bar{a}_{k_1k_2}^p \leqslant c\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[(t_1t_2)^{-\theta}K(t_1t_2;f)\big]^p\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_2}{t_2}\\
&\leqslant c_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[(t_1t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)}K(t_1^{1/p_0-1/p_1},t_2^{1/p_0-1/p_1};f)\big]^p\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_2}{t_2}\\
&\leqslant c_1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[(t_1t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)}\bigg(\int_0^{t_1}\bigg(\int_0^{t_2}f^{*_1}(s_1,x_2)(s_1s_2)^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\bigg)^{*_2}_{s_2}\frac{ds_2}{s_2}\\
&\quad+t_1^{1/p_0-1/p_1}\int_{t_1}^{2\pi}\bigg(\int_0^{t_2}f^{*_1}(s_1,x_2)(s_2-t_2)^{1/p_1-1}s_1^{1/p_0-1}\,ds_1\bigg)^{*_2}_{s_2}ds_2\\
&\quad+t_2^{1/p_0-1/p_1}\int_0^{t_1}\bigg(\int_{t_2}^{2\pi}f^{*_1}(s_1,x_2)s_2^{1/p_0-1}(s_1-t_1)^{1/p_1-1}\,ds_1\bigg)^{*_2}_{s_2}ds_2\\
&\quad+(t_1t_2)^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}\int_{t_1}^{2\pi}\bigg(\int_{t_2}^{2\pi}f^{*_1}(s_1,x_2)(s_1-t_1)^{1/p_1}(s_2-t_2)^{1/p_1}\frac{ds_1}{s_1}\bigg)^{*_2}_{s_2}\frac{ds_2}{s_2}\bigg)\Bigg]^p\\
&\quad\times\frac{dt_1}{t_1}\,\frac{dt_2}{t_2}.\end{aligned}$$

Здесь выражение $\left(\int_0^{t_2} f^{*_1}(s_1,x_2)(s_1s_2)^{1/p_0-1}\,ds_1\right)^{*_2}_{s_2}$ – невозрастающая перестановка по переменной x_2 функции $F(x_2)=\int_0^{t_2} f^{*_1}(s_1,x_2)s_1^{1/p_0-1}\,ds$, вычисленная в точке s_2 и умноженная на s_2^{1/p_0-1}. Аналогично определяются и другие подобные выражения.

Оценим каждое слагаемое

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(t_1t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)}\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2} f^{*_1}(s_1,x_2)(s_1s_2)^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{s_2}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_0^1 f^{*_1}(s_1t_1,x_2)(s_1s_2)^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{s_2t_2}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p dt_1\,dt_2.$$

Применяя неравенство Минковского и сделав замену s_2t_2 на t_2, первое слагаемое оцениваем через

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 s_2^{1/p_0-1/p}\frac{ds_2}{s_2}\right)^p\int_0^{2\pi}\left(\left(\int_0^1 f^*(s_1t_1,x_2)s_1^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{t_2}\right)^p dt_1\,dt_2$$
$$=c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 f^*(s_1t_1,x_2)s_1^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^p dt_1\right)dx_2.$$

Также применяя неравенство Минковского и соответствующие замены, получим оценку через величину $\|f\|_{L_p}$.

Второе слагаемое:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(t_1t_2)^{\theta(1/p_1-1/p_0)}t_1^{1/p_0-1/p_1}\right.$$
$$\left.\times\int_{t_1}^{2\pi}\left(\int_0^{t_2} f^{*_1}(s_1x_2)(s_1-t_1)^{1/p_1}s_2^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{s_2}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$
$$\leqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(t_1t_2)^{-\theta(1/p_0-1/p_1)}t_1^{1/p_0-1/p_1}\right.$$
$$\left.\times\int_0^1\left(\int_1^\infty f^{*_1}(s_1t_1,x_2)(s_1-1)^{1/p_1}t_1^{1/p_1}(s_2t_2)^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{s_2t_2}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$
$$\leqslant\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_1^\infty f^{*_1}(s_1t_1,x_2)(s_1-1)^{1/p_1}t_1^{1/p_1}(s_2)^{1/p_0}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2}_{s_2t_2}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p dt_1\,dt_2$$
$$\leqslant\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 s_2^{1/p_0-1/p}\frac{ds_2}{s_2}\right]^p\int_0^{2\pi}\left(\int_1^\infty f^{*_1}(s_1t_1,x_2)(s_1-1)^{1/p_1}\frac{ds_1}{s_1}\right)^{*_2p}_{(t_2)}dt_2\,dt_1$$
$$\leqslant C\int_0^{2\pi}\left(\int_1^\infty(s_1-1)^{1/p_1-1/p}\frac{ds_1}{s_1}\left(\int_0^{2\pi}|f^{*_1}(t_1,x_2)|^p dt_1\right)^{1/p}\right)^p dx_2=c_1\|f\|_p^p.$$

Третье и четвертое слагаемые оцениваются аналогично. Теорема доказана.

Последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ будем называть обобщенно монотонной в $\mathbb{Z}^n$, если для любого $m\in\mathbb{Z}^n$ выполняется неравенство

$$|a_m|\leqslant c\,\frac{1}{|Q_m|}\left|\sum_{k\in Q_m}a_k\right|,\qquad Q_m=\bigl\{k\in\mathbb{Z}^n:0\leqslant k_j\operatorname{sign}m_j\leqslant|m|\bigr\}.$$

Условие обобщенной монотонности является более слабым, чем монотонность и квазимонотонность.

Следствие 5. *Пусть* $2 \leqslant p < \infty$, $f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$, *где* $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ – *обобщенно монотонна в* $\mathbb{Z}^n$. *Тогда для того чтобы* $f \in L_p$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{p-2} \cdots k_n^{p-2} \hat{f}^p(k_1,\dots,k_n) < \infty.$$

Следствие 6 (обобщение теоремы Харди). *Пусть* $2 \leqslant p < \infty$, $\{I_m = I_1^m \times \dots \times I_n^m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ – *произвольная последовательность гармонических отрезков таких, что* $|I_j^m| = |m_j|$, $j = 1,\dots,n$. *Если функция* $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)e^{imx}$ – *ее ряд Фурье*, $b_m = \frac{1}{|I_m|}\sum_{k\in I_m} \hat{f}(k)$, *то ряд*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m e^{imx}$$

сходится в $L_p(\mathbb{T}^n)$ *и верно неравенство*

$$\Big\|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m e^{imx}\Big\|_{L_p} \leqslant c_{p,n}\|f\|_{L_p}.$$

Доказательство проводится с помощью последовательного применения неравенства Харди–Литлвуда и теоремы 4

$$\begin{aligned}\Big\|\sum b_m e^{imx}\Big\|_{L_p}^p &\leqslant c_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |m_1|^{p-2}\cdots|m_n|^{p-2}|b_m|^p \\ &\leqslant c_2 \sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(k_1\dots k_n)^{p-2}\hat{a}_k^p(M_0) \leqslant c_3\|f\|_{L_p}^p.\end{aligned}$$

Список литературы

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Кокилашвили В. М.* О приближении периодических функций // Труды Тбилисского матем. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
3. *Дьяченко М. И.* О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). №1. С. 55–72.
4. *Djachenco M. I.* Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. №3. P. 173–190.
5. *Moricz F.* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. №2. P. 417–425.
6. *Дьяченко М. И.* Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. №3. С. 3–20.
7. *Hunt R. A.* On $L(p,q)$ spaces // Enseign. Math., II. 1966. V. 12. P. 249–276.
8. *Берг Й., Лефстрем Й.* Введение // Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1960.
9. *Дьяченко М. И.* Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди–Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №6. С. 1156–1170.
10. *Cobus F., Peetre J.* Interpolation compact operators: The multidimensional cose // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. №2. P. 371–400.

Институт прикладной математики НАН РК

Поступила в редакцию 30.01.1997