Пространства стохастических процессов, интерполяционные теоремы

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

В работе вводятся пространства стохастических процессов, которые являются аналогами сетевых пространств [1]. Доказываются интерполяционные свойства и теоремы вложения.

Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ с фильтрацией, т.е. семейством $\mathbf{F}=\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ σ-алгебр F_n таких, что $F_1\subseteq\dots\subseteq F_n\subseteq\dots\subseteq\mathscr{F}$.

Для заданного стохастического процесса $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant1}$ и $k\in\mathbb{N}$ обозначим

$$\overline{X}_k=\sup_{A\in F_k,\mathsf{P}(A)>0}\frac{1}{\mathsf{P}(A)}\biggl|\int_A X_k\,\mathsf{P}(d\omega)\biggr|.$$

Через $N_{pq}(\mathbf{F})$, $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, обозначим множество стохастических процессов $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant1}$, для которых при $q<\infty$

$$\|X\|^q_{N_{pq}(\mathbf{F})}:=\sum_{k=1}^\infty k^{-1-\frac{q}{p}}\overline{X}_k^{\,q}<\infty$$

и при $q=\infty$

$$\|X\|_{N_{p\infty}(\mathbf{F})}:=\sup_k k^{-\frac1p}\overline{X}_k<\infty.$$

$N_{pq}(\mathbf{F})$ будет квазинормированным пространством (при $q\geqslant1$ нормированным) как факторпространство по ядру

$$J=\biggl\{X:\int_A X_k\,\mathsf{P}(d\omega)=0,\ A\in F_k,\ k\geqslant1\biggr\}.$$

Введенные пространства $N_{pq}(\mathbf{F})$ характеризуют усиленный закон больших чисел для стохастических процессов. Если $X\in N_{pq}(\mathbf{F})$, то последовательность $\{X_k(\omega)/k\}_{k=1}^\infty$ почти всюду стремится к нулю таким образом, что

$$\sum_{k=1}^\infty\biggl(k^{\frac{1}{p'}}\frac{(X_k(\omega)}{k})\biggr)^q\frac1k<\infty.$$

Пусть стохастический процесс $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant1}$ является субмартингалом. Тогда

1) при $0<q_1\leqslant q\leqslant\infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}\leqslant c\|X\|_{N_{pq_1}(\mathbf{F})}$;

2) при $0<p<p_1<\infty$, $0<q,q_1\leqslant\infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}\leqslant c\|X\|_{N_{p_1q_1}(\mathbf{F})}$.

Пусть $T=\{T_n\}_{n=1}^\infty$ – преобразование стохастических процессов, определенных на $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ с фильтрацией $\mathbf{F}=\{F_n\}$, в стохастические процессы, определенные на $(\Lambda,\mathscr{R},\nu)$ с фильтрацией $\mathbf{\Phi}=\{\Phi_n\}:T(X)=\{T_n(X),\Phi_n\}_{n=1}^\infty$. Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $c>0$ такое, что для любого $n\in\mathbb{N}$ верно $\overline{T_n(X)-T_n(Y)}\leqslant c\,\overline{T_n(X-Y)}$.

Пусть $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant1}$ – стохастический процесс, $\tau(\omega)$ – марковский момент [2]. Через X^τ обозначим "остановленный" процесс $X^\tau=(X_{n\wedge\tau},F_n)_{n\geqslant1}$, где $X_{n\wedge\tau}=\sum_{m=1}^{n-1}X_m\chi_{\tau=m}(\omega)+X_n\chi_{\tau\geqslant n}(\omega)$, а через X^* – стохастический процесс $(\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_k,F_n)_{n\geqslant1}$.

Данные преобразования стохастического процесса X являются примерами квазилинейных преобразований.

Теорема 1. *Пусть* $0<p_0<p_1<\infty$, $0<r_0<r_1<\infty$, $0<\theta<1$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $\frac1r=\frac{1-\theta}{r_0}+\frac{\theta}{r_1}$, $\frac1p=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$, $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant1}$ *– субмартингал и* $T=\{T_n\}_{n=1}^\infty$ *– квазилинейное преобразование. Если для любого* $k\in\mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\|T(X^k)\|_{N_{r_1\infty}(\mathbf{\Phi})}\leqslant M_0\|X^k\|_{N_{p_11}(\mathbf{F})},\qquad \|T(X-X^k)\|_{N_{r_0\infty}(\mathbf{\Phi})}\leqslant M_1\|X-X^k\|_{N_{p_01}(\mathbf{F})},$$

то

$$\|T(X)\|_{N_{rs}(\mathbf{\Phi})} \leqslant c\max(M_0,M_1)\|X\|_{N_{ps}(\mathbf{F})}.$$

Данная теорема отличается от классических интерполяционных теорем [3]. Здесь интерполируются не пространства, а преобразование фиксированного стохастического процесса, т.е. условия и утверждение теоремы относятся к одному процессу.

Теорема 2. *Пусть процесс* $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant 1}$ *является субмартингалом,* $\tau(\omega)$ – *марковский момент. Тогда имеют место неравенства*

$$\|X^\tau\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leqslant c\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}, \qquad \|X^*\|_{N_{pq}(\mathbf{F})} \leqslant c\|X\|_{N_{pq}(\mathbf{F})}.$$

Пусть $1<p<\infty$, $p'=p/(p-1)$, $1<q\leqslant\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Определим пространство мартингалов

$$N_p^{\alpha q}(\mathbf{F})=\biggl\{X=(X_n,F_n)_{n\geqslant 1} - \text{мартингал}: \sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X_k})^q<\infty\biggr\},$$

где

$$\overline{\Delta X_k}=\sup_{A\in\mathscr{F},\mathsf{P}(A)>0}\frac{1}{[\mathsf{P}(A)]^{\frac{1}{p'}}}\biggl|\int_A(X_{2^{k+1}}-X_{2^k})\,P(d\omega)\biggr|, \qquad X_{2^{-1}}\equiv 0.$$

$N_p^{\alpha q}(\mathbf{F})$ является пространством сходящихся мартингалов, где параметры α, q и p характеризуют скорость и метрику, в которой сходится данный процесс.

Пусть $\mathbf{A}=(A_0(\mathbf{F}),A_1(\mathbf{F}))$ – пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфова пространства $\mathscr{N}(\mathbf{F})$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ с фильтрацией $\mathbf{F}=\{F_n\}_{n\geqslant 1}$.

Для $0<\theta<1$ при $0<q<\infty$ обозначим

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=\biggl\{X\in\mathscr{N}(\mathbf{F}):\|X\|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,X))^q\,\frac{dt}{t}<\infty\biggr\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty}=\Bigl\{X\in\mathscr{N}(\mathbf{F}):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,X)<\infty\Bigr\},$$

где $K(t,X;A_0,A_1)=\inf_{X=Y+Z}(\|Y\|_{A_0}+t\|Z\|_{A_1})$ – функционал Петре [3].

Теорема 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $1\leqslant q,q_0,q_1\leqslant\infty$, $\alpha_0<\alpha_1$, $0<\theta<1$, $\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$. *Тогда* $(N_p^{\alpha_0 q_0}(\mathbf{F}),N_p^{\alpha_1 q_1}(\mathbf{F}))_{\theta,q}=N_p^{\alpha q}(\mathbf{F})$.

Теорема 4. *Пусть фильтрация* $\mathbf{F}=\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ *такова, что для каждого* $k=1,2,\dots$ *и любого* $A\in F_k$ *выполнено условие* $\mathsf{P}(A)\geqslant\frac{c}{k}$, *где постоянная* $c>0$ *не зависит от* k. *Если* $1<r<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $\alpha=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$, *то имеет место вложение* $N_r^{\alpha q}(\mathbf{F})\hookrightarrow N_{pq}(\mathbf{F})$.

Список литературы

[**1**] Е. Д. Нурсултанов, *Матем.сб.*, **189**:3 (1998), 83–102. [**2**] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 2005. [**3**] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

Т. У. Аубакиров (T. U. Aubakirov)
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Е. Д. Нурсултанов (E. D. Nursultanov)
Казахстанский филиал
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: er-nurs@yandex.ru

Представлено А. Г. Костюченко
Принято редколлегией
08.09.2006