УДК 517.5

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости

Для пространств функций многих переменных Соболева и Коробова построена квадратурная формула, коэффициенты и узлы которой определены в явном виде. Полученная формула является точной для тригонометрических полиномов с гармониками из соответствующего ступенчатого гиперболического креста. Погрешность этой квадратурной формулы в классах $W_p^\alpha[0,1]^n$, $E^\alpha[0,1]^n$ равна $o((\ln M)^\beta/M^\alpha)$, где M – число узлов, β – параметр, зависящий от этих классов.

Рассмотрена задача о приближенном вычислении кратных интегралов для функций из класса $W_p^\alpha[0,1]^n$ в случае, когда указанный класс не вложен в пространство непрерывных функций, т.е. при $\alpha \leqslant 1/p$.

Библиография: 26 названий.

Пусть F – некоторый класс функций, интегрируемых в смысле Римана на $[0,1]^n$, $n>1$, $c=(c_1,\dots,c_M)\in\mathbb{R}^M$, $t_k\in[0,1)^n$, $k=1,2,\dots,M$, $I(f)=\int_{[0,1]^n} f(y)\,dy$.

Число

$$\delta_M(F;c,t)=\sup_{\|f\|_F=1}\biggl|I(f)-\sum_{k=1}^M c_k f(t_k)\biggr|$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы

$$\sum_{k=1}^M c_k f(t_k)$$

для класса функций F.

Оптимальной погрешностью квадратурных формул, соответствующих количеству узлов M, для класса F называется число

$$\delta_M(F)=\inf_{t,c}\delta_M(F;c,t),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным наборам $t=(t_1,\dots,t_M)$, $c=(c_1,\dots,c_M)$, $t_k\in[0,1)^n$, $c_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,M$.

Пусть $W_p^\alpha[0,1]^n$ – пространство Соболева с доминирующей смешанной производной.

В 1959 г. Н.М. Коробов [1] ввел в рассмотрение квадратурные формулы с сетками вида

$$t_k=\biggl(\biggl\{\frac{ka_1}{M}\biggr\},\biggl\{\frac{ka_2}{M}\biggr\},\dots,\biggl\{\frac{ka_n}{M}\biggr\}\biggr),\qquad k=1,2,\dots,M, \tag{1}$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x и $a_1, a_2, \dots, a_n$ – некоторые взаимно простые с M числа, зависящие от размерности n и количества точек M. Эти сетки называют *параллелепипедными теоретико-числовыми сетками.* Оценка погрешности квадратурных формул, полученных с помощью подобных сеток (см. [1]–[11]), с коэффициентами $c_k = 1/M$ точна относительно степенной шкалы, а именно имеет место соотношение: при $\alpha > 1/p$

$$\delta_M(W_p^\alpha[0,1]^n) \ll \frac{\ln^\beta M}{M^\alpha}\,, \tag{2}$$

где β – некоторое число, зависящее от параметров α, p и n.

В случае $\alpha > \max\{1/p, 1/2\}$, $1 < p < \infty$, получен точный порядок

$$\delta_M(W_p^\alpha[0,1]^n) \asymp M^{-\alpha}(\log_2 M)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Нижняя оценка доказана в [11] и [12], а верхняя – в [13] при $2 \leqslant p < \infty$ и в [14], [3] при $1 \leqslant p < 2$.

Несмотря на простоту задания сетки вида (1) нахождение чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ является самостоятельной задачей. Построению квадратурных формул с алгоритмом нахождения чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ посвящены работы [7]–[9]. Показано, что при $n < 19$ имеется алгоритм, позволяющий вычислить коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ за $O(M \ln\ln M)$ операций.

Второй подход связан с работами С. А. Смоляка [15], В. Н. Темлякова [16], [17]. Он основан на аппроксимативных свойствах тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов. Здесь используются введенные С. А. Смоляком сетки вида

$$\left\{\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) : 0 \leqslant r_j \leqslant 2^{k_j} - 1,\ j = 1, \dots, n,\ k_1 + \dots + k_n \leqslant [\log_2 M]\right\}, \tag{3}$$

а коэффициенты c_k могут быть вычислены за $O(M(\ln M)^{n-1})$ операций.

В настоящей работе построены квадратурные формулы для пространств Соболева $W_p^\alpha[0,1]^n$, Коробова $E^\alpha[0,1]^n$ (см. [1]) с погрешностью вида (2), точные для тригонометрических полиномов со спектром из соответствующего гиперболического креста. Коэффициенты и узлы сетки этой формулы определены в явном виде.

Рассмотрена задача восстановления интегралов для классов $W_{pq}^\alpha[0,1]^n$ в предельном ($\alpha = 1/p$) и "запредельном" ($\alpha \leqslant 1/p$) случаях.

При $\alpha = 1/p$ рассматривается пространство $W_{pq}^\alpha[0,1]^n$, где в определении вместо нормы пространства Лебега $L_p[0,1]^n$ используется норма анизотропного пространства Лоренца $L_{pq}[0,1]^n$ (см. [18], [19]), здесь q является "слабым" метрическим параметром по отношению к p. Для классов $W_{p1}^{1/p}[0,1]^n$ имеет место вложение в пространство непрерывных функций $C[0,1]^n$ и появляется возможность построения квадратурных формул.

При $\alpha \leqslant 1/p$ мы исходим из того, что в реальных задачах информация f о рассматриваемом объекте $[0,1]^n$ поступает в виде некоторых усредненных данных $\dfrac{1}{|e_k|}\displaystyle\int_{e_k} f(x)\,dx$ с соответствующих участков e_k ($|e_k|$ – мера e_k). Можно считать, что метод сбора информации единообразен, т.е. $e_k = e + t_k$. Таким образом, приходим к задаче восстановления интеграла Лебега

$$I(f) = \int_{[0,1]^n} f(x)\,dx$$

с помощью квадратурных формул

$$\sum_{k=1}^{M} b_k \frac{1}{|e|} \int_{e+t_k} f(x)\,dx.$$

Эта задача рассматривается в §6.

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ будем обозначать соответственно множества натуральных и целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}^n = \{r = (r_1, \dots, r_n) : r_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, n\}$. Аналогично определяются множества $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}_+^n$.

§1. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$. Пространство Лоренца $L_{pq}[0,1]^n$ определяется как множество измеримых функций f на отрезке $[0,1]^n$, для которых верно

$$\|f\|_{L_{pq}[0,1]^n} = \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left((t_1 \cdots t_n)^{1/p} f^{*_1 \cdots *_n}(t_1, \dots, t_n)\right)^q \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q} < \infty,$$

здесь $f^{*_1 \cdots *_n}(t_1, \dots, t_n)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x_1, \dots, x_n)$, взятая последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$. В случае $q = \infty$ выражение $\left(\int |F(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$ понимается как $\sup_{t>0} |F(t)|$.

Пространство l_{pq} – это множество последовательностей $\xi = \{\xi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\|\xi\|_{l_{pq}} = \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 \cdots k_n)^{q/p-1} (\xi_{k_1 \dots k_n}^{*_1 \cdots *_n})^q \right)^{1/q} < \infty,$$

где $\{\xi_{k_1 \dots k_n}^{*_1 \cdots *_n}\}_{k \in \mathbb{N}^n}$ – невозрастающая перестановка последовательности $\{\xi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, взятая последовательно по переменным индексам $m_1, \dots, m_n$. Аналогично,

$$\left(\sum_k k^{-1} |b_k|^q \right)^{1/q} = \sup_k |b_k|$$

при $q = \infty$.

Для этих пространств имеют место неравенство Гёльдера и неравенство типа Юнга–О'Нейла [20].

1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$, тогда имеют место неравенства

$$\int_{[0,1]^n} |f(x)g(x)|\,dx \leqslant c \|f\|_{L_{pq}} \|g\|_{L_{p'q'}}, \tag{4}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k b_k| \leqslant c \|a\|_{l_{pq}} \|b\|_{l_{p'q'}}, \tag{5}$$

где константа c зависит только от параметров p и q.

2. Пусть $1 < p, q, r < \infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}.$$

Тогда

$$\|f * g\|_{L_{q\tau}} \leqslant c\|g\|_{L_{r\infty}}\|f\|_{L_{p\tau}}, \tag{6}$$
$$\|a * b\|_{l_{q\tau}} \leqslant c\|b\|_{l_{r\infty}}\|a\|_{l_{p\tau}}, \tag{7}$$

где константа c зависит только от параметров p и q.

Теорема А. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$, $f \in L_{p\tau}[0,1]^n$, $f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ *– векторы с целочисленными координатами*, $\overline{k}_j = \max(|k_j|, 1)$. *Тогда*

$$A(f;\alpha,u,v) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \overline{k}_j\right)^{-\alpha} a_{u_1+k_1v_1,\dots,u_n+k_nv_n} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n}(u_j+k_jv_jx_j)} \in L_{q\tau}[0,1]^n \tag{8}$$

и

$$\|A(f;\alpha,u,v)\|_{L_{q\tau}} \leqslant c\|f\|_{L_{p\tau}},$$

где константа c не зависит от функции f и векторов u, v.

Доказательство. Оценка нормы оператора A сводится к оценке нормы интегрального оператора свертки с ядром

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(e^{2\pi i v_j x_j} - 1)^{1-\alpha}}.$$

Невозрастающая перестановка $\varphi^{*_1\cdots *_n}(t_1, \dots, t_n)$ функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ оценивается через $\dfrac{c}{t_1^{1-\alpha}\cdots t_n^{1-\alpha}}$, $t \in (0,1]^n$, где константа c не зависит от вектора v. Поэтому утверждение теоремы следует из неравенства (6).

В случае, когда $v = (1, \dots, 1)$, $u = (0, \dots, 0)$, теорема А приведена в работе В. Н. Темлякова [21].

Теорема Б. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $p' = p/(p-1)$.
а) *Если* $1 < p < 2$ *и* $f \in L_{pq}[0,1]^n$, $f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$, *то* $a \in l_{p'q}$ *и*

$$\|a\|_{l_{p'q}} \leqslant c\|f\|_{L_{pq}[0,1]^n}.$$

б) *Если* $2 < p < \infty$ *и* $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \in l_{p'q}$, *то найдется функция* $f \in L_{pq}[0,1]^n$ *такая, что* $f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m x}$ *и*

$$\|f\|_{L_{pq}[0,1]^n} \leqslant c\|a\|_{l_{p'q}}.$$

Теорема Б доказана в работе [22] в более общем случае.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – векторы такие, что если $1 \leqslant p_j < \infty$, то $1 \leqslant q_j \leqslant \infty$, если же $p_j = \infty$, то $q_j = \infty$, $j = 1, \dots, n$.

Если W_j, $j = 1, \dots, n$, – некоторые фиксированные семейства конечных множеств из $\mathbb{Z}$, то семейство $W = W_1 \times \dots \times W_n$ подмножеств $\mathbb{Z}^n$ назовем *сетью* в $\mathbb{Z}^n$. *Сетевое пространство* $n_{\mathbf{pq}}(W)$ определяется как множество последовательностей комплексных чисел $\{a_{k_1 \dots k_n}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ таких, что

$$\|a\|_{n_{\mathbf{pq}}(W)} = \Biggl(\sum_{k_n=1}^{\infty} k_n^{q_n/p_n - 1} \dots \Biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1^{q_1/p_1 - 1} (\overline{a}_{k_1 \dots k_n}(W))^{q_1} \Biggr)^{q_2/q_1} \dots \Biggr)^{1/q_n} < \infty,$$

здесь

$$\overline{a}_{k_1 \dots k_n}(W) = \sup_{|e_j| > k_j, e \in W} \frac{1}{|e|} \Biggl| \sum_{k \in e} a_k \Biggr|,$$

$|e|$ – количество элементов множества $e = e_1 \times \dots \times e_n$, а $|e_j|$ – количество элементов e_j, $j = 1, \dots, n$. Если для некоторого j $\sup_{e_j \in W_j} |e_j| = d_j$ и $k_j > d_j$, то будем считать, что $\overline{a}_{k_1 \dots k_n}(W) = 0$.

Для пространств $n_{\mathbf{pq}}(W)$ верны следующие свойства:

1) если $W_1 \subset W_2$, то $n_{\mathbf{pq}}(W_2) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq}}(W_1)$;
2) если $\mathbf{q} \leqslant \mathbf{q}_1$, т.е. $q_j \leqslant q_j^1$, $j = 1, \dots, n$, то верно $n_{\mathbf{pq}}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq}_1}(W)$;
3) если $p_{j_0} < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения

$$n_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{q}_1}(W) \hookrightarrow n_{\mathbf{pq}}(W),$$

где

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \qquad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n),$$
$$\mathbf{p}_\varepsilon = (p_1, \dots, p_{j_0 - 1}, p_{j_0} - \varepsilon, p_{j_0+1}, \dots, p_n),$$
$$\mathbf{q}_1 = (q_1, \dots, q_{j_0 - 1}, \infty, q_{j_0+1}, \dots, q_n).$$

Пусть $B = \{m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + l\}$ – отрезок в $\mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d > l$. Множество вида $I = \bigcup_{k=0}^{N} [B + kd] = \bigcup_{k=0}^{N} \{m + kd : m \in B\}$ назовем *гармоническим отрезком* в $\mathbb{Z}$. Тогда множество вида $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, где I_i – гармонические отрезки в $\mathbb{Z}$, называется гармоническим отрезком в $\mathbb{Z}^n$.

В работе [22] в терминах сетевых пространств при $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$ получена оценка снизу нормы функции f из $L_{\mathbf{pq}}[0, 1]^n$ через ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе. Фигурирующая константа в этом неравенстве зависит от параметра $\mathbf{p}$. В следующем утверждении приведено это неравенство с константой, имеющей явную зависимость от $\mathbf{p}$, которое будет использовано в дальнейшем.

Теорема B. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}/(\mathbf{p}-\mathbf{1})$, $f \sim \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi i r x}$.

Если W_0 *– множество всех гармонических отрезков в* $\mathbb{Z}^n$, *то верно неравенство*

$$\|a\|_{n_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}(W_0)} \leqslant c\prod_{j=1}^n \max\{p_j, p_j'\}\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}[0,1]^n}$$

и, в частности, при $\mathbf{p} = (p,\dots,p)$, $\mathbf{q} = (q,\dots,q)$

$$\biggl(\sum_{k_n=1}^\infty \cdots \sum_{k_1=1}^\infty \biggl(\prod_{j=1}^n k_j\biggr)^{q/p'-1} \overline{a}_k^q(W_0)\biggr)^{1/q} \leqslant c(\max\{p,p'\})^n\|f\|_{L_{pq}[0,1]^n}.$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n);\ \varepsilon_j = 0,1,\ j = 1,\dots,n\}$ – множество вершин n-мерного единичного куба. Для вектора $\varepsilon \in E$ и последовательности комплексных чисел определим разность $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$:

$$\Delta_\varepsilon b_k = \Delta_{\varepsilon_1}(\Delta_{\varepsilon_2}\dots(\Delta_{\varepsilon_n} b_{k_1\dots k_n})\dots),$$

где

$$\Delta_{\varepsilon_j} b_k = \begin{cases} b_k, & \varepsilon_j = 0,\\ b_{k_1\dots k_{j-1},k_j+1,k_{j+1}\dots k_n} - b_k, & \varepsilon_j = 1.\end{cases}$$

Верно тождество

$$\begin{aligned}\sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N & b_{k_1\dots k_n} a_{k_1\dots k_n}\\ &= \sum_{\varepsilon\in E}\sum_{k_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \cdots \sum_{k_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \Delta_\varepsilon b_{k_1\dots k_n}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n} a_{m_1\dots m_n}. \qquad (9)\end{aligned}$$

Данное соотношение назовем *многомерным преобразованием Абеля*.

§ 2. Классы функций $W^\alpha_{pq}[0,1]^n$ и $E^\alpha_{pq}[0,1]^n$

Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\alpha > 0$, f – 1-периодическая функция из $L_{pq}[0,1]^n$ с рядом Фурье $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{2\pi i k x}$. Будем говорить, что $f \in W^\alpha_{pq}[0,1]^n$, если найдется $f^\alpha \in L_{pq}[0,1]^n$, ряд Фурье которой совпадает с рядом $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{k}^\alpha a_k e^{2\pi i k x}$, здесь и далее $\overline{k}^\alpha = \prod_{j=1}^n \overline{k}_j^\alpha$, $\overline{k}_j = \max\{|k_j|, 1\}$, $j = 1,2,\dots,n$,

$$\|f\|_{W^\alpha_{pq}[0,1]^n} \overset{\mathrm{def}}{=} \|f^\alpha\|_{L_{pq}[0,1]^n}.$$

Класс $E^\alpha_{pq}[0,1]^n$, $0 < \alpha < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, определяется как множество функций f из $L_1[0,1]^n$ с коэффициентами Фурье $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i k x}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, удовлетворяющих соотношению

$$\|f\|_{E^\alpha_{pq}[0,1]} = \|\{\overline{k}^\alpha a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{l_{p'q}} < \infty.$$

Данный класс при $p=1$, $q=\infty$ совпадает с классом Коробова [1].

Отметим некоторые свойства пространств $W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$, $E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$.

1°. *Если* $q<q_1$, *то*

$$E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow E^{\alpha}_{pq_1}[0,1]^n, \qquad W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow W^{\alpha}_{pq_1}[0,1]^n.$$

2°. *Пусть* $1\leqslant q, q_1\leqslant\infty$; *для любого* $\varepsilon>0$ *верно*

$$E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow E^{\alpha}_{p-\varepsilon q_1}[0,1]^n, \qquad W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow W^{\alpha}_{p-\varepsilon q_1}[0,1]^n.$$

Свойства 1° и 2° следуют из соответствующих свойств пространств Лоренца [19].

3°. *Пусть* $\alpha_1<\alpha$ *и* $1/p-\alpha=1/p_1-\alpha_1$, *тогда*

$$E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow E^{\alpha_1}_{p_1 q}[0,1]^n, \qquad W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow W^{\alpha_1}_{p_1 q}[0,1]^n.$$

Докажем свойство 3°. Пусть $1\leqslant q<\infty$, $\varepsilon>0$. Через $\{(\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\}_{m\in\mathbb{N}^n}$ будем обозначать невозрастающую перестановку последовательности $\overline{r}^{\alpha_1}a_r=\{\overline{r}_1^{\alpha_1}\cdots\overline{r}_n^{\alpha_n}a_{r_1\ldots r_n}\}_{r\in\mathbb{Z}^n}$, взятую по переменным индексам $r_1,\ldots,r_n$.

Используем свойства невозрастающей перестановки и неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{E^{\alpha_1}_{p_1q}} &\leqslant \biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(k_1\cdots k_n)^{q/p_1'-1} \\
&\qquad\times\biggl(\frac{1}{k_1\cdots k_n}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(\overline{r}^{\alpha_1}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\biggr)^q\biggr)^{1/q} \\
&\leqslant c_1\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(k_1\cdots k_n)^{q/p_1'-1} \\
&\qquad\times\biggl(\frac{1}{k_1\cdots k_n}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(m_1\cdots m_n)^{\alpha_1-\alpha}(\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\biggr)^q\biggr)^{1/q} \\
&\leqslant c_2\biggl(\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=1}^{\infty}(k_1\cdots k_n)^{-q\varepsilon-1} \\
&\qquad\times\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(m_1\cdots m_n)^{q(1/p'+\varepsilon)-1}\bigl((\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\bigr)^q\biggr)^{1/q} \\
&\leqslant c_3\biggl(\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}(m_1\cdots m_n)^{q/p'-1}\bigl((\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\bigr)^q\biggr)^{1/q} = c_3\|f\|_{E^{\alpha}_{pq}}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $q=\infty$, тогда

$$\begin{aligned}\|f\|_{E^{\alpha_1}_{p\infty}} &\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{(k_1\cdots k_n)^{1/p}}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(\overline{r}^{\alpha_1}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\\ &\leqslant c_1\sup_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{(k_1\cdots k_n)^{1/p}}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(m_1\cdots m_n)^{\alpha_1-\alpha}(\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{m_1\ldots m_n}\\ &\leqslant c_1\sup_{k\in\mathbb{N}^n}(k_1\cdots k_n)^{1/p'}(\overline{r}^{\alpha}a_r)^{*_1\cdots *_n}_{k_1\ldots k_n}\\ &\quad\times\sup_{k\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{(k_1\cdots k_n)^{1/p}}\sum_{m_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{m_n=1}^{k_n}(m_1\cdots m_n)^{-1/p_1'}=c\|f\|_{E^{\alpha}_{p\infty}}.\end{aligned}$$

Вложение $W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n\hookrightarrow W^{\alpha_1}_{p_1q}[0,1]^n$ непосредственно следует из теоремы A.

4°. *При* $2<p<\infty$

$$E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n\hookrightarrow W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n,$$

при $1<p<2$

$$W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n\hookrightarrow E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n.$$

Свойство 4° следует из теоремы Б.

Пусть $A[0,1]^n$ – множество абсолютно сходящихся кратных тригонометрических рядов,

$$\|f\|_A=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|a_k|$$

и $U[0,1]^n$ – множество непрерывных функций на $[0,1]^n$ с мажорантой частичных сумм,

$$\|f\|_U=\sup_{x\in[0,1]^n}\sup_{N\in\mathbb{N}}|S_{Q_N}(f;x)|,$$

где $S_{Q_N}(f;x)=\sum_{m_1=-N}^{N}\cdots\sum_{m_n=-N}^{N}a_{m_1\ldots m_n}e^{2\pi i\sum_{j=1}^n m_jx_j}$ – частичная сумма Фурье, соответствующая кубу $Q_N=\{m\in\mathbb{Z}^n:|m_j|\leqslant N,\ j=1,\ldots,n\}$.

5°. *Пусть* $1<p<\infty$, *тогда* $E^{1/p}_{p1}[0,1]^n\hookrightarrow A[0,1]^n$.

Действительно, пусть $f\in E^{1/p}_{p1}[0,1]^n$, $f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_ke^{2\pi ikx}$. Заметим, что $\left\{\dfrac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_n)^{1/p}}\right\}\in l_{p\infty}$, поэтому из неравенства Гёльдера (5) непосредственно следует

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|a_k|\leqslant\|\{\overline{k}^{1/p}a_k\}\|_{l_{p'1}}\|\{\overline{k}^{-1/p}\}\|_{l_{p\infty}}=c\|f\|_{E^{1/p}_{p1}}.$$

6°. *Если* $1<p<2$, *то* $W^{1/p}_{p1}[0,1]^n\hookrightarrow A[0,1]^n$. *Если* $2\leqslant p<\infty$, *то* $W^{1/p}_{p1}[0,1]^n\hookrightarrow U[0,1]^n$.

Докажем свойство 6°. При $1<p<2$ соответствующее вложение следует из 4° и 5°. Пусть теперь $2\leqslant p<\infty$. Достаточно оценить частичную сумму ряда Фурье функции $f\in W^{1/p}_{p1}[0,1]^n$ вида

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N}a_ke^{2\pi ikx}=\sum_{k_1=1}^{N}\cdots\sum_{k_n=1}^{N}a_{k_1\ldots k_n}e^{2\pi i\sum_{j=1}^n k_jx_j}.$$

Применяя преобразование Абеля (9), получаем

$$\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} a_k e^{2\pi ikx}\Big| \leqslant c\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{k=(1-\varepsilon)N+\varepsilon}^{N-\varepsilon}\frac{1}{k^{1/p}}\Big|\frac{1}{k^{\varepsilon}}\sum_{1\leqslant m\leqslant k} m^{1/p}a_m e^{2\pi imx}\Big|.$$

Используем неравенство Гёльдера (5), учитывая, что $\left\{\frac{1}{k^{1/p}}\right\}_{k\in\mathbb{N}^n}\in l_{p\infty}$:

$$\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} a_k e^{2\pi ikx}\Big| \leqslant c\sum_{\varepsilon\in E}\left\|\left\{\frac{1}{k^{1/p}}\right\}\right\|_{l_{p\infty}}\|\{m^{1/p}a_m e^{2\pi imx}\}\|_{n_{p',\varepsilon^{-1}}(W)}. \qquad (10)$$

Здесь W – множество всех гармонических отрезков, $\varepsilon^{-1}=(\varepsilon_1^{-1},\dots,\varepsilon_n^{-1})$, считаем, что $\varepsilon_j^{-1}=\infty$ при $\varepsilon_j=0$ и $\varepsilon_j^{-1}=1$ при $\varepsilon=1$. Воспользуемся теоремой B и (10) и получим

$$\Big|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} a_k e^{2\pi ikx}\Big| \leqslant c2^n\|\{m^{1/p}a_m e^{2\pi imx}\}\|_{n_{p',1}} \leqslant c_1\|f\|_{W_{p1}^{1/p}}.$$

§ 3. Квадратурные формулы

Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]^n$, $\operatorname{sgn} r=1$ при $r>0$ и $\operatorname{sgn} r=0$ при $r=0$. Для 1-периодической функции f из $C[0,1]^n$ определим функцию

$$\begin{aligned}T_{2^m}(f;x)=\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}}\frac{1}{2^m}\sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn} k_j)}\\ \times f\left(x_1+\frac{r_1}{2^{k_1}},\dots,x_n+\frac{r_n}{2^{k_n}}\right).\end{aligned} \qquad (11)$$

Построенный оператор является конечной линейной комбинацией операторов сдвига, соответствующих узлам сетки Смоляка

$$\left\{\left(\frac{r_1}{2^{k_1}},\dots,\frac{r_n}{2^{k_n}}\right): 0\leqslant r_j\leqslant 2^{k_j}-1,\ k_1+\dots+k_n=m,\ r_j,k_j\in\mathbb{Z}_+\right\}.$$

Через $D_k, D_{k\nu}$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $\nu=1,\dots,n-1$, обозначим множества

$$\begin{aligned}D_k&=\big\{\big(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),2^{k_n}r_n\big):\\ &\qquad r\in\mathbb{Z}^n,\ r_n\neq 0\big\},\\ D_{k\nu}&=\big\{\big(0,\dots,0,2^{k_\nu-1}(2r_\nu+\operatorname{sgn} k_\nu),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),0\big):\\ &\qquad (r_\nu,\dots,r_{n-1})\in\mathbb{Z}^{n-\nu}\big\}.\end{aligned} \qquad (12)$$

Целью этого параграфа является доказательство теоремы, показывающей, что оператор T_{2^m} есть мультипликативное преобразование кратных рядов Фурье, соответствующее определенной числовой последовательности $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^n}$, принимающей значения $+1,-1,0$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_1[0,1]^n$ *и* $\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi irx}$ *– ее ряд Фурье. Тогда для функции* $T_{2^m}(f;x)$, *определенной равенством* (11), *имеет место*

$$T_{2^m}(f;x) \sim a_{0\dots0} + \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_k} a_r e^{2\pi irx}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} k_j \leqslant m < \sum_{j=\nu}^{n-1} k_j} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_{k\nu}} a_r e^{i2\pi rx}.$$

Здесь и далее будем считать, что $\sum_{j=\nu+1}^{n-1}\beta_j = 0$ *при* $\nu = n-1$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

Лемма 1 [19]. *Пусть* $d \in \mathbb{N}^n$, $B = B_1\times\dots\times B_n$ *– отрезок в* $\mathbb{Z}^n$, $d_j > |B_j|$, $j = 1,\dots,n$, $I = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}^n}((B_1+r_1d_1)\times\dots\times(B_n+r_nd_n))$.

Если $f\in L_1[0,1]^n$, $f \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi imx}$, *то ряд*

$$S_I(f) = \sum_{m\in I} a_m e^{2\pi imx}$$

является рядом Фурье функции

$$\frac{1}{d}\sum_{0\leqslant r\leqslant d-1} f\left(x+\frac{r}{d}\right) D_B\left(\frac{r}{d}\right)$$
$$= \frac{1}{d_1\cdots d_n}\sum_{r_1=0}^{d_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{d_n-1} f\left(x_1+\frac{r_1}{d_1},\dots,x_n+\frac{r_n}{d_n}\right) D_B\left(\frac{r_1}{d_1},\dots,\frac{r_n}{d_n}\right),$$

где $D_B(x) = \sum_{m\in B} e^{i2\pi mx}$ *– ядро Дирихле, соответствующее отрезку* B.

Лемма 2. *Пусть* f *– 1-периодическая функция из* $L_1[0,1]^n$ *и* $\sum_{r\in\mathbb{Z}^n} a_r e^{i2\pi rx}$ *– ее ряд Фурье. Тогда ряд Фурье функции* $T_{2^m}(f;x)$, *определенной равенством* (11), *совпадает с рядом*

$$\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$
$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n2^{k_n}},$$

где $d_{r_1\dots r_n} = a_{r_1\dots r_n} e^{2\pi i\sum_{j=1}^n r_jx_j}$.

Доказательство. Так как $T_{2^m}(f;x)$ есть конечная линейная комбинация функций из $L_1[0,1]^n$, то $T_{2^m}(f;x) \in L_1[0,1]$. Заметим теперь, что $(-1)^r = e^{i2\pi \frac{2^{k-1}r}{2^k}}$ при $k \in \mathbb{N}$, $r = 1,2,\ldots,2^k-1$, поэтому функцию $T_{2^m}(f;x)$ можно представить в виде

$$T_{2^m}(f;x) = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j}$$
$$\times \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} D_{k_1\ldots k_n}\left(\frac{r_1}{2^{k_1}},\ldots,\frac{r_n}{2^{k_n}}\right) f\left(x_1+\frac{r_1}{2^{k_1}},\ldots,x_n+\frac{r_n}{2^{k_n}}\right),$$

где

$$D_{k_1\ldots k_n}(y_1,\ldots,y_n) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n-1} 2^{k_j-1}y_j}.$$

Воспользовавшись леммой 1, убеждаемся в справедливости утверждения.

Лемма 3. *Пусть $b = \{b_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in l_1$, тогда верно представление*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r\in\mathbb{Z}} b_{2^{k-1}+r2^k}.$$

Доказательство. Заметим, что произвольное целое число m, отличное от нуля, представимо единственным образом в виде $m = 2^{k-1}+r2^k$, $k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}$, откуда и следует соответствующее представление суммы $\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_m$.

Лемма 4. *Пусть $d = \{d_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \in l_1$, тогда*

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n\leqslant m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n}\operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)} = d_{0,\ldots,0}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\substack{k_{\nu+1}+\cdots+k_n\leqslant m\\ <k_\nu+\cdots+k_n}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n}\operatorname{sgn} k_j}$$
$$\times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-\nu+1}} d_{0,\ldots,0,2^{k_\nu-1}(2r_\nu+\operatorname{sgn} k_\nu),\ldots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}.$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n\leqslant m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\operatorname{sgn} k_1+\dots+\operatorname{sgn} k_n} \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&= \sum_{k_1=0}^{m} (-1)^{\operatorname{sgn} k_1} \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n\leqslant m-k_1\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j}\\
&\qquad \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&= \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n\leqslant m\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{r_1,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn} k_2),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&\quad - \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2+\dots+k_n\leqslant m-k_1} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j}\\
&\qquad \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся леммой 3:

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{k_2+\dots+k_n\leqslant m} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn} k_2),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&\quad + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2+\dots+k_n\leqslant m} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&\quad - \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2+\dots+k_n\leqslant m-k_1} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j}\\
&\quad \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&= \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n\leqslant m\\ k_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn} k_2),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}\\
&\quad + \sum_{\substack{k_2+\dots+k_n\leqslant m\\ <k_1+\dots+k_n}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}.
\end{aligned}
$$

Применяя к сумме

$$
\sum_{\substack{k_2+\dots+k_n\leqslant m\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=2}^n \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{0,2^{k_2-1}(2r_2+\operatorname{sgn} k_2),\dots,2^{k_n-1}(2r_n+\operatorname{sgn} k_n)}
$$

ту же процедуру, что и выше, через $n-1$ шагов придем к искомому результату.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 следует, что

$$
\begin{aligned}
T_{2^m}(f;x) \sim & \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j} \\
& \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n2^{k_n}} \\
= & \sum_{k_1+\dots+k_n=m} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j} \\
& \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n2^{k_n}} \\
& + \sum_{k_1+\dots+k_{n-1}\leqslant m} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn} k_j} \\
& \times \sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} d_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),0}.
\end{aligned}
$$

Применяя лемму 4 ко второму слагаемому, получаем требуемое утверждение.

Пусть $m\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$,

$$
Q_k = \{r\in\mathbb{Z}^n : |r_j|\leqslant 2^{k_j-1},\ j=1,2,\dots,n\}\setminus\{(\pm[2^{k_1-1}],\dots,\pm[2^{k_n-1}])\}
$$

– целочисленный параллелепипед, в котором исключены вершины. Множество

$$
G_m = \bigcup_{\substack{k_1+\dots+k_n=m+1 \\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} Q_k \tag{13}
$$

назовем *ступенчатым гиперболическим крестом порядка* m.

Следствие 1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$,

$$
f(y) = \sum_{k\in G_m} a_k e^{2\pi i k y}
$$

– тригонометрический полином, соответствующий ступенчатому гиперболическому кресту G_m, *тогда оператор* (11) *определяет квадратурную формулу, точную для этой функции, т.е.*

$$
\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f)-T_{2^m}(f;x)| = 0.
$$

Замечание 1. Пусть F – некоторое функциональное пространство,

$$
E_{G_m}(f)_F = \inf_{\{c_r\}} \Big\| f(x) - \sum_{r\in G_m} c_r e^{2\pi i r x} \Big\|_F
$$

– наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром из гиперболического креста G_m в функциональном пространстве F.

Из следствия 1 и линейности оператора $T_{2^m}(f;x)$ вытекает, что для получения оценок вида
$$|I(f)-T_{2^m}(f;x)|\leqslant C(m;F)E_{G_m}(f)_F,$$
где константа $C(m,F)$ зависит от класса F и параметра m, достаточно доказать, что
$$|I(f)-T_{2^m}(f;x)|\leqslant C(m;F)\|f\|_F.$$

§ 4. Оценка погрешности квадратурных формул для функций из пространств E^{α}_{pq}

Теорема 2. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $m,n\in\mathbb{N}$, G_m *– ступенчатый гиперболический крест* (13).

а) *Если* $\alpha>1/p$, $f\in E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$, *то*
$$\sup_{x\in[0,1)^n}|I(f)-T_{2^m}(f;x)|\leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}}E_{G_m}(f)_{E^{\alpha}_{pq}}.$$

б) *Если* $\alpha=1/p$, $f\in E^{1/p}_{p1}[0,1]^n$, *то*
$$\sup_{x\in[0,1)^n}|I(f)-T_{2^m}(f;x)|\leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}}E_{G_m}(f)_{E^{1/p}_{p1}}.$$

Доказательство. Пусть $f\in E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$. Из теоремы 1 и свойства 5° пространства $E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$ следует, что
$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,1)^n}|I(f)-T_{2^m}(f;x)|\\
&\leqslant\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}}\Big|\sum_{r\in D_k}a_re^{2\pi irx}\Big|+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\substack{k_{\nu+1}+\dots+k_{n-1}\leqslant m\\ <k_\nu+\dots+k_{n-1}}}\Big|\sum_{r\in D_{k\nu}}a_re^{2\pi irx}\Big|\\
&\leqslant J_m+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\ k\in\mathbb{Z}^{n-\nu}_+}}\Big|\sum_{r\in D_{k\nu}}a_re^{2\pi irx}\Big|\\
&=J_m+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}J_{\nu s},
\end{aligned}$$
D_k, $D_{k\nu}$ определены в (12). Слагаемое $J_{\nu s}$ оценивается через
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{\alpha(s-n+\nu)}}\sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}}\\
&\quad\times\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-\nu}}\frac{|b_{0,\dots,0,2^{k_\nu-1}(2r_\nu+\operatorname{sgn}k_\nu),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),0}|}{|\overline{r}_\nu\cdots\overline{r}_{n-1}|^{\alpha}},
\end{aligned}$$

где

$$b_{l_1\dots l_n} = |\bar{l}_1\cdots\bar{l}_n|^\alpha a_{l_1\dots l_n}.$$

Применяя неравенство Гёльдера (5), получаем

$$J_{\nu s} \leqslant \frac{1}{2^{\alpha s}}\|b\|_{l_{p'q}}\|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq'}} \leqslant \frac{1}{2^{\alpha s}}\|f\|_{E^\alpha_{pq}}\|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq'}}, \tag{14}$$

здесь $\xi_{\nu s} = \{\xi^{\nu s}_t\}_{t\in\mathbb{Z}^n}$ – последовательность, элементы которой определяются следующим образом: $\xi^{\nu s}_t = |\overline{r}_\nu\cdots\overline{r}_n|^{-\alpha}$ при $k_\nu+\dots+k_{n-1} = s$, $t = (0,\dots, 2^{k_\nu-1}(2r_\nu+\operatorname{sgn} k_\nu),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),0)$ и $\xi^{\nu s}_t = 0$ в остальных случаях.

Данная последовательность $\xi_{\nu s}$ состоит из чисел вида $1/|\overline{r}_\nu\cdots\overline{r}_{n-1}|^\alpha$, $r\in\mathbb{Z}^{n-\nu}$, причем каждое такое число встречается не более $s^{n-\nu}$ раз. Учитывая условие $\alpha > 1/p$, нетрудно видеть, что

$$\|\xi_{\nu s}\|_{l_{pq}} \leqslant c_1 s^{(n-\nu)/p} \leqslant c_1 s^{(n-1)/p}$$

и, следовательно,

$$J_{\nu s} \leqslant \frac{c_1 s^{(n-1)/p}}{2^{\alpha s}}\|f\|_{E^\alpha_{pq}}.$$

Тогда

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} J_{\nu s} \leqslant c_1\sum_{s=m+1}^{\infty}\frac{s^{(n-1)/p}}{2^{\alpha s}}\|f\|_{E^\alpha_{pq}} \leqslant c_2\frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}}\|f\|_{E^\alpha_{pq}}.$$

Слагаемое J_m оценивается так же:

$$J_m \leqslant c_3\frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}}\|f\|_{E^\alpha_{pq}}.$$

С учетом замечания 1 утверждение п. а) теоремы 2 доказано.

Доказательство п. б) проводится по той же схеме. Достаточно рассмотреть неравенство (14) при $q = 1$, учитывая, что $\{(\overline{r}_\nu\cdots\overline{r}_{n-1})^{-1/p}\}_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}} \in l_{p\infty}$.

Замечание 2. Порядок оптимальной погрешности квадратурных формул для класса Коробова известен:

$$\delta_M(E^\alpha[0,1]^n) \asymp M^{-\alpha}(\log_2 M)^{n-1}.$$

Нижняя оценка получена в [23], а верхняя – в [3] при $n = 2$ и в [13] в общем случае.

Оператор $T_{2^m}(f;x)$ не реализует оптимальную погрешность. Из теоремы 2 следует оценка
$$\delta_M(E^\alpha[0,1]^n) \leqslant M^{-\alpha}(\log_2 M)^{(n-1)(1+\alpha)}.$$
Следующее утверждение показывает, что оценки, приведенные в теореме 2 для квадратурной формулы $T_{2^m}(f;x)$, неулучшаемые по порядку.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $x \in [0,1]^n$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/p$. Тогда*

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha_{pq}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \asymp \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}},$$

$$\sup_{\|f\|_{E^{1/p}_{p1}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \asymp \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}},$$

где соответствующие константы зависят лишь от параметров p, α, n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из теоремы 2. Пусть $x \in [0,1]^n$,

$$f(y) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{N}^n}} 2^{-\alpha m} e^{2\pi i \sum_{j=1}^n 2^{k_j}(y_j - x_j)},$$

тогда

$$I(f) = \int_{[0,1]^n} f(y)\,dy = 0,$$

$$\|f\|_{E^\alpha_{pq}} \sim \left(\sum_{k=1}^{m^{(n-1)}} k^{q/p'-1}\right)^{1/q} \sim m^{(n-1)/p'},$$

$$\|f\|_{E^{1/p}_{p1}} \sim \sum_{k=1}^{m^{(n-1)}} k^{1/p'-1} \sim m^{(n-1)/p'}.$$

Рассмотрим функции $f_1(y) = f(y)/\|f\|_{E^\alpha_{pq}}$ и $f_2(y) = f(y)/\|f\|_{E^{1/p}_{p1}}$.

Таким образом, имеем

$$\sup_{\|f\|_{E^\alpha_{pq}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \geqslant |T_{2^m}(f_1, x)|$$

$$\geqslant c_1 m^{-(n-1)/p'} 2^{-\alpha m}\left(\sum_{k=1}^{m^{n-1}} 1\right) = c_1 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{\alpha m}},$$

$$\sup_{\|f\|_{E^{1/p}_{p1}}=1} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \geqslant |T_{2^m}(f_2, x)| \geqslant c_2 \frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}}.$$

Следствие доказано.

§ 5. Оценка погрешности квадратурных формул для функций из пространств $W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 1/2$, $p \neq 2$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, G_m *– ступенчатый гиперболический крест* (13).

а) *Если* $\alpha > 1/p$, $r = \min\{p, 2\}$, $f \in W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$, *то*

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W^{\alpha}_{pq}}.$$

б) *Если* $\alpha = 1/p$, $f \in W^{1/p}_{p1}[0,1]^n$, *то*

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/p}}{2^{m/p}} E_{G_m}(f)_{W^{1/p}_{p1}}.$$

Доказательство. а) Пусть $p < 2$. Из условий теоремы следует, что $r = p$, $1/\alpha < r < 2$. Воспользуемся теоремой 2 и вложением $W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n \hookrightarrow E^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$ при $1 < p < 2$ (см. свойство 4°). Тогда

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c_1 \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E^{\alpha}_{rq}} \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W^{\alpha}_{pq}}.$$

Если $p > 2$, то, учитывая, что $\alpha > 1/2$, из теоремы 2 и неравенства Гёльдера (4) также имеем

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c_1 \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{E^{\alpha}_{22}}$$
$$\sim \frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W^{\alpha}_{22}} \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)/r}}{2^{\alpha m}} E_{G_m}(f)_{W^{\alpha}_{pq}}.$$

Пункт б) также следует из теоремы 2.

Следствие 3. *Пусть* $\alpha > 1/2 > 1/p$, $m, n \in \mathbb{N}$, *тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W^{\alpha}_{p}[0,1]^n}=1} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \asymp \frac{m^{(n-1)/2}}{2^{\alpha m}}.$$

Доказательство. Рассмотрим тот же пример, что и в доказательстве следствия 2.

Пусть $x \in [0,1]^n$,

$$f_0(y) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}} 2^{-\alpha m} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n} 2^{k_j}(y_j - x_j)}.$$

Тогда, используя теорему Литтлвуда–Пели [24], получаем

$$\|f_0\|_{W_p^\alpha} \sim \left\| \left(\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_n} |\Delta_k(f_0^\alpha, x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p} \sim m^{(n-1)/2},$$

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha}=1} |I(f) - T_{2^m}(f; x)| \geqslant cm^{-(n-1)/2} |T_{2^m}(f_0, x)|$$

$$\geqslant cm^{-(n-1)/2} 2^{-\alpha m} m^{n-1} = c\, \frac{m^{(n-1)/2}}{2^{\alpha m}}\,.$$

Обратное неравенство следует из теоремы 3. Следствие доказано.

Лемма 5. *Пусть* $2 \leqslant p < \infty$, $N \geqslant 2$, $r > 0$, W *– произвольная сеть в* $\mathbb{Z}^n$. *Если* T_N *– линейный оператор такой, что*

$$\|T_N f\|_{n_{p'p}(W)} \leqslant c_1 N p^r \|f\|_{L_p}, \tag{15}$$

$$\|T_N f\|_{n_{22}(W)} \leqslant c_2 N^{1/2} \|f\|_{L_2},$$

где c_1, c_2 *– постоянные, не зависящие от* p, f, N, *то*

$$\|T_N f\|_{n_{p'p}(W)} \leqslant cp^r N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p'-1/p)} \|f\|_{L_p}, \tag{16}$$

где постоянная c *не зависит от* p, f, N.

Доказательство. Пусть $p_0 = \log_2 N$, тогда, используя соотношения

$$N = N^{1/p_0'} N^{1/p_0} = 2N^{1/p_0'},$$

$$p_0^r = (\log_2 N)^r = (\log_2 N)^{r(1/p_0'-1/p_0)} (\log_2 N)^{2r/p_0} \leqslant 4^r (\log_2 N)^{r(1/p_0'-1/p_0)},$$

неравенство (15) перепишем в виде

$$\|T_N f\|_{n_{p_0'p_0}} \leqslant c_r N^{1/p_0'} (\log_2 N)^{r(1/p_0'-1/p_0)} \|f\|_{L_{p_0}}.$$

Воспользуемся комплексным интерполяционным методом, учитывая при этом (см. [25]), что

$$(n_{p_0q_0}(W), n_{p_0q_0}(W))_{[\theta]} \hookrightarrow n_{pq}(W),$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}\,,$$

тогда при $2 < p < p_0 = \log_2 N$ получим

$$\|T_N f\|_{n_{p'p}} \leqslant c_r N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p'-1/p)} \|f\|_{L_p}. \tag{17}$$

Пусть теперь $p_0 \leqslant p < \infty$, тогда $N \leqslant N^{1/p'} N^{1/p_0} \leqslant 2N^{1/p'}$ и, следовательно, из (15) имеем

$$\|T_N f\|_{n_{p'p}} \leqslant 2c_1 N^{1/p'} p^r \|f\|_{L_p} \leqslant 2c_1 N^{1/p'} (\log_2 N)^{r(1/p'-1/p)} p^r \|f\|_{L_p}. \tag{18}$$

Таким образом, объединяя неравенства (17) и (18), получаем (16).

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \leqslant 1/2$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $n,m \in \mathbb{N}$, $Y_k = \bigcup_{j=1}^n \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_j| < 2^{k_j-1}\}$ – *крест, соответствующий индексу* $k \in \mathbb{Z}_+^n$, G_m – *ступенчатый гиперболический крест* (13).

а) *Если* $\alpha > 1/p$, $f \in W_{pq}^\alpha[0,1]^n$, *то*

$$\sup_{x\in[0,1]^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)(1-\alpha)}(\log_2 m)^{n(2(1-\alpha)-1/p)}}{2^{\alpha m}} \times E_{G_m}(f)_{W_{pq}^\alpha}, \tag{19}$$

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{1}{2^{-\alpha m}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_{pq}^\alpha}. \tag{20}$$

б) *Если* $\alpha = 1/p$, $f \in W_{p1}^{1/p}[0,1]^n$, *то*

$$\sup_{x\in[0,1)^n} |I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{1}{2^{-m/p}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_{p1}^{1/p}}. \tag{21}$$

Доказательство. Согласно свойствам 4°, 6° (см. §2) можно считать, что $f(y) = \sum_r a_r e^{2\pi i r y}$ – тригонометрический полином, т.е. только конечное число коэффициентов отлично от нуля. По теореме 1 для квадратурной формулы $T_{2^m}(f;x)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
|I(f) - T_{2^m}(f;x)| &= \Biggl| \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\substack{k_{\nu+1}+\dots+k_{n-1}\leqslant m\\ <k_\nu+\dots+k_{n-1}}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_{k\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \Biggr| \\
&\leqslant \Biggl| \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_k} a_r e^{2\pi i r x} \Biggr| \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \Biggl| \sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} (-1)^{\sum_{j=\nu+1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \sum_{r\in D_{k\nu}} a_r e^{2\pi i r x} \Biggr| \\
&= J_m(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} J_{s\nu}(x),
\end{aligned}$$

множества D_k, $D_{k\nu}$ определены в (12). Пусть $b_{r_1\dots r_n} = \overline{r}_1^\alpha \cdots \overline{r}_n^\alpha a_{r_1\dots r_n} e^{2\pi i r x}$,

$r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0,1]^n$, тогда для первого слагаемого $J_m(x)$ имеет место

$$J_m(x) \leqslant 2^{-\alpha(m-n+1)} \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n-1}} \sum_{r_n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|r_n|^\alpha \prod_{j=1}^{n-1} |2r_j+1|^\alpha} \times \Bigg| \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n 2^{k_n}} \Bigg|.$$

Для оценки $J_m(x)$ достаточно оценить сумму вида

$$\sum_{r_1=1}^{N} \dots \sum_{r_n=1}^{N} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} |r_j|^\alpha} \Bigg| \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n 2^{k_n}} \Bigg|. \tag{22}$$

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n);\ \varepsilon_j = 0,1,\ j = 1,\dots,n\}$ – множество вершин n-мерного единичного куба, h – произвольное число, удовлетворяющее условию $1/p < 1/h < \alpha$. Применим преобразование Абеля (9), а затем неравенство Гёльдера (5), учитывая при этом, что $1/p < \alpha$:

$$\begin{aligned} &\Bigg| \sum_{r_1=1}^{N} \dots \sum_{r_n=1}^{N} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} |r_j|^\alpha} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),r_n 2^{k_n}} \Bigg| \\ &\leqslant c_1 \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{r_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n} \dots \sum_{r_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} |r_j|^{\alpha+\varepsilon_j}} \\ &\quad\times \Bigg| \sum_{\nu_1=1}^{r_1} \dots \sum_{\nu_n=1}^{r_n} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2\nu_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2\nu_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),\nu_n 2^{k_n}} \Bigg| \\ &\leqslant c_2 \sum_{\varepsilon \in E} \|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \|d\|_{n_{h',h\varepsilon^{-1}}} \leqslant c_3 2^n \|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \|d\|_{n_{h',h}}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $r^{-\alpha} = \{(r_1 \cdots r_n)^{-\alpha}\}_{r\in\mathbb{N}^n}$,

$$d = \Bigg\{ \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn} k_j} \times b_{2^{k_1-1}(2\nu_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2\nu_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}),\nu_n 2^{k_n}} \Bigg\}_{\nu\in\mathbb{N}^n}. \tag{24}$$

Так как $1/p < 1/h < \alpha$, то $\|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} < \infty$ и, более того, имеет место оценка:

$$\|r^{-\alpha}\|_{l_{hh'}} \leqslant c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/h'}} \leqslant c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}}, \tag{25}$$

здесь константа не зависит от h.

Пусть A_m – оператор, сопоставляющий каждой функции $\psi \sim \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} b_r e^{2\pi i r x}$ таблицу чисел (24). Согласно теореме B данный оператор удовлетворяет условиям леммы 5, т.е.

$$\|A_m\psi\|_{n_{h',h}} \leqslant c_1 h^n m^{n-1} \|\psi\|_{L_h},$$
$$\|A_m\psi\|_{n_{22}} \leqslant \|A_m\psi\|_{L_{22}} \leqslant m^{(n-1)/2} \|\psi\|_{L_2}.$$

Поэтому, используя лемму 5 и соотношения (23), (25), оценим выражение (22) через

$$c_2 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h' - 1/h)} \|f\|_{W_h^\alpha}.$$

Таким образом, применяя неравенство Гёльдера ($h < p$), получаем

$$J_m \leqslant c_3 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \, \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h'-1/h)}}{2^{\alpha(m-n)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}.$$

Аналогично получаются оценки для слагаемого $J_{s\nu}$:

$$J_{s\nu} \leqslant c_4 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \, \frac{s^{(n-1)/h'} (\log_2 s)^{n(1/h'-1/h)}}{2^{\alpha(s-\nu)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} J_{s\nu} \leqslant c_5 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{s^{(n-1)/h'} (\log_2 s)^{n(1/h'-1/h)}}{2^{\alpha(s-\nu)}}$$
$$\leqslant c_6 \frac{1}{(\alpha - 1/h)^{n/p'}} \, \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h'-1/h)}}{2^{\alpha(m-n)}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}.$$

Так как f – произвольный тригонометрический многочлен, то неравенство

$$|I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c_7 \frac{m^{(n-1)/h'} (\log_2 m)^{n(1/h'-1/h)}}{(\alpha - 1/h)^{n/p'} 2^{\alpha m}} \|f\|_{W_{pq}^\alpha}$$

верно для любой функции $f \in W^{\alpha}_{pq}[0,1]^n$ и произвольного h такого, что $1/p < 1/h < \alpha$. Тем самым доказано соотношение:

$$\frac{2^{\alpha m}(\log_2 m)^{n(2\alpha-1)}|I(f)-T_{2^m}(f;x)|}{m^{(n-1)(1-\alpha)}\|f\|_{W^{\alpha}_{pq}}} \leqslant c_7 \frac{[m^{(n-1)}(\log_2 m)^{2n}]^{\alpha-1/h}}{(\alpha-1/h)^{n/p'}}. \tag{26}$$

Левая часть выражения (26) не зависит от параметра h. Функция $F(t) = B^t/t^{\beta}$, $t > 0$, $B > 1$, $\beta > 0$, достигает своего минимума в точке $t = \beta/\ln B$. Поэтому из (26) получим

$$|I(f)-T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)(1-\alpha)}(\log_2 m)^{n(1/p'+1-2\alpha)}}{2^{\alpha m}}\|f\|_{W^{\alpha}_{pq}},$$

откуда с учетом замечания 1 следует (19).

Докажем соотношения (20) и (21).

Будем считать, что f – тригонометрический полином. По теореме 1 имеем

$$\begin{aligned}
&|I(f)-T_{2^m}(f;x)| \\
&\quad\leqslant \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}} \Big|\sum_{r\in D_k} a_r e^{2\pi i r x}\Big| + \sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}}\Big|\sum_{r\in D_{k\nu}} a_r e^{2\pi i r x}\Big| \\
&\quad= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}^n_+}} J_k(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} J_{\nu k}(x).
\end{aligned}$$

Как и выше, пусть $b_{r_1\dots r_n} = \overline{r}_1^{\alpha}\cdots\overline{r}_n^{\alpha} a_{r_1\dots r_n} e^{2\pi i r x}$, $r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in [0,1]^n$, тогда слагаемое $J_k(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
J_k(x) = 2^{-\alpha(m-n+1)}\Big|&\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{|r_n|^{\alpha}\prod_{j=1}^{n-1}|2r_j+1|^{\alpha}} \\
&\times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),r_n2^{k_n}}\Big|.
\end{aligned}$$

Чтобы получить оценку J_k, достаточно рассмотреть выражение вида

$$\Big|\sum_{r_1=1}^{N}\cdots\sum_{r_n=1}^{N}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} r_j^{\alpha}} b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),r_n2^{k_n}}\Big|.$$

Так же как и при доказательстве первого утверждения теоремы, применим преобразование Абеля (9):

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{r_1=1}^{N}\cdots\sum_{r_n=1}^{N}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} r_j^{\alpha}} b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),r_n2^{k_n}}\Big| \\
&\quad\leqslant c_1\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{r_n=(1-\varepsilon_n)N+\varepsilon_n}^{N-\varepsilon_n}\cdots\sum_{r_1=(1-\varepsilon_1)N+\varepsilon_1}^{N-\varepsilon_1}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} r_j^{\alpha+\varepsilon_j}} \\
&\qquad\times\Big|\sum_{l_1=1}^{r_1}\cdots\sum_{l_n=1}^{r_n} b_{2^{k_1-1}(2l_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2l_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),l_n2^{k_n}}\Big|.
\end{aligned}\tag{27}$$

Применяем неравенство Гёльдера (5), учитывая, что $\alpha > 1/p$, $\{r^{-\alpha}\}_{r\in\mathbb{N}^n} \in l_{pq}$, и теорему B:

$$\begin{aligned} J_k &\leqslant c_2\|\{r^{-\alpha}\}\|_{l_{p\infty}} \sum_{\varepsilon\in E} \|b_k\|_{n_{p',\varepsilon^{-1}}} \\ &\leqslant 2^n c_3 \|b_k\|_{n_{p',q}} \leqslant c_4\|\psi_k\|_{L_{p,q}} = c_4\|f_k\|_{W^\alpha_{pq}} \leqslant c_5 E_{Y_k}(f)_{W^\alpha_{pq}}, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{gathered} B_k = \{(2^{k_1-1}(2l_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2l_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), l_n 2^{k_n}) : \\ l\in\mathbb{N}^n,\ l_n\neq 0\}, \\ b_k = \{\overline{m}^\alpha a_m : m\in B_k\}, \qquad \psi_k \sim \sum_{m\in B_k} \overline{m}^\alpha a_m e^{2\pi i m y}, \qquad f_k \sim \sum_{m\in B_k} a_m e^{2\pi i m y}. \end{gathered}$$

Для доказательства (21) при $\alpha = 1/p$ из (27) получаем

$$\begin{aligned} &\Biggl| \sum_{r_1=1}^N \cdots \sum_{r_n=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1}^n r_j^\alpha} b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn} k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn} k_{n-1}), r_n 2^{k_n}} \Biggr| \\ &\quad\leqslant c_6\|\{r^{-\alpha}\}\|_{l_{p\infty}} \sum_{\varepsilon\in E} \|b_k\|_{n_{p',1}} \leqslant 2^n c_7 \|b_k\|_{n_{p',1}} \leqslant c_8\|\psi_k\|_{L_{p,1}} \\ &\quad= c_8\|f_k\|_{W^\alpha_{p1}} \leqslant c_9 E_{Y_k}(f)_{W^\alpha_{p1}}. \end{aligned}$$

Слагаемое $J_{k\nu}$ оценивается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $M\in\mathbb{N}$, тогда при $1/p < \alpha \leqslant 1/2$*

$$\delta_M(W^\alpha_p) \leqslant cM^{-\alpha}(\log_2 M)^{(n-1)}(\log_2\log_2 M)^{2-2\alpha-1/p},$$

а при $\alpha > 1/r = \max\{1/2, 1/p\}$

$$\delta_M(W^\alpha_p) \leqslant cM^{-\alpha}(\log_2 M)^{(\alpha+1/r)(n-1)}.$$

Доказательство следует из теорем 3 и 4.

§ 6. Дисперсионные соотношения для семейства квадратурных формул $\{T_{2^m}(f;x)\}_{x\in[0,1)^n}$ и приближенное вычисление интеграла Лебега

Как уже отмечалось во введении, квадратурные формулы для пространств $W^\alpha_p[0,1]^n$, $E^\alpha_p[0,1]^n = E^\alpha_{pp}[0,1]^n$ имеют смысл лишь при $\alpha > 1/p$, т.е. как минимум функции должны быть определены всюду на $[0,1]^n$. В то же время, для f из $W^\alpha_p[0,1]^n$, $E^\alpha_p[0,1]^n$ ($\alpha > 0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$) функция $T_{2^m}(f;x)$, задающая семейство квадратурных формул $\{T_{2^m}(f;x)\}_{x\in[0,1)^n}$, определена почти всюду на $[0,1]^n$ и может рассматриваться как элемент пространства Лебега $L_q[0,1]^n$.

В этом параграфе для функций f из классов $W_p^\alpha[0,1]^n$ и $E_p^\alpha[0,1]^n$ будут изучаться "отклонения" семейства квадратурных формул $\{T_{2^m}(f;x)\}_{x\in[0,1)^n}$ от интеграла Лебега $I(f)=\int_{[0,1]^n} f(y)\,dy$ в метрике $L_q[0,1]^n$.

Теорема 5. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $1<p<q<\infty$, $h=\max\{q,2\}$, $\alpha=1/p-1/h$, $T_{2^m}(f;x)$ – функция, определенная равенством* (11). *Тогда для $f\in E_p^\alpha[0,1]^n$ имеет место неравенство*

$$\|I(f)-T_{2^m}(f;\cdot)\|_{L_q}\leqslant c\,\frac{m^{(n-1)\alpha}}{2^{\alpha m}}E_{G_m}(f)_{E_p^\alpha[0,1]^n}. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть $2\leqslant q<\infty$, $\alpha=1/p-1/q$, $f\in E_p^\alpha[0,1]^n$, $f\sim\sum_{r\in\mathbb{Z}^n}a_re^{2\pi irx}$, $b_r(x)=\overline{r}^\alpha a_re^{2\pi irx}$, $r\in\mathbb{Z}^n$, $x\in[0,1]^n$.

Из теоремы 1 и неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned}\|I(f)-T_{2^m}(f;\cdot)\|_{L_q[0,1]^n}&\leqslant 2^{-\alpha(m-n)}\|J_m\|_{L_q[0,1]^n}\\&\quad+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}2^{-\alpha(s-\nu)}\|J_{s\nu}\|_{L_q[0,1]^n},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}J_m(x)={}&\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-1}}\sum_{r_n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{|r_n|^\alpha\prod_{j=1}^{n-1}|2r_j+1|^\alpha}\Bigg|\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\k\in\mathbb{Z}_+^n}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{sgn}k_j}\\&\times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{k_{n-1}}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),r_n2^{k_n}}(x)\Bigg|,\\J_{s\nu}(x)={}&\sum_{r\in\mathbb{Z}^{n-\nu}}\frac{1}{\prod_{j=\nu}^{n-1}(2r_j-1)^\alpha}\Bigg|\sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s\\k\in\mathbb{Z}_+^{n-\nu}}}(-1)^{\sum_{j=\nu}^{n-1}\operatorname{sgn}k_j}\\&\times b_{2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,2^{k_{n-1}-1}(2r_{k_{n-1}}+\operatorname{sgn}k_{n-1}),r_n2^{k_n}}(x)\Bigg|.\end{aligned}$$

Применяя теорему Б, получаем

$$\|I(f)-T_{2^m}(f;\cdot)\|_{L_q}\leqslant 2^{-\alpha(m-n)}\|b_m\|_{l_{q'q}}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}2^{-\alpha(s-\nu)}\|b_{s\nu}\|_{l_{q'q}},$$

где b_m, $b_{s\nu}$ – соответственно коэффициенты Фурье функций $J_m(x)$, $J_{s\nu}(x)$. Далее, применяя неравенство Гёльдера (5), получаем

$$\begin{aligned}\|I(f)-T_{2^m}(f;\cdot)\|_{L_q}\leqslant c_1\Bigg[&2^{-\alpha m}\|g_m\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}}\|f\|_{E_p^\alpha}\\&+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=m+1}^{\infty}2^{-\alpha s}\|g_{s\nu}\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}}\|f\|_{E_p^\alpha}\Bigg],\end{aligned}$$

здесь $g_m = \{g_t^m\}_{t\in\mathbb{Z}^n}$ и $g_{\nu s} = \{g_t^{\nu s}\}_{t\in\mathbb{Z}^n}$,

$$g_t^m = \begin{cases} |\overline{r}_1\cdots\overline{r}_n|^{-\alpha}, & t = \bigl(2^{k_1-1}(2r_1+\operatorname{sgn}k_1),\dots,\\ & \qquad 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}), 2^{k_n}r_n\bigr),\\ & s = k_1+\dots+k_n,\ k\in\mathbb{Z}_+^n,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$g_t^{\nu s} = \begin{cases} |\overline{r}_\nu\cdots\overline{r}_{n-1}|^{-\alpha}, & t = \bigl(0,\dots,2^{k_\nu-1}(2r_\nu+\operatorname{sgn}k_\nu),\dots,\\ & \qquad 2^{k_{n-1}-1}(2r_{n-1}+\operatorname{sgn}k_{n-1}), 0\bigr),\\ & s = k_\nu+\dots+k_{n-1},\ k\in\mathbb{Z}_+^{n-\nu},\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Отметим, что $\|g_m\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}} \sim m^{(n-1)\alpha}$, $\|g_{\nu s}\|_{l_{\frac{1}{\alpha}\infty}} \sim s^{(n-\nu)\alpha}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|I(f)-T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_q} &\leqslant c_2\biggl[2^{-\alpha m}m^{\alpha(n-1)} + \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha s}s^{(n-1)/p}\biggr]\|f\|_{E_p^\alpha}\\ &\leqslant c(2^{-\alpha m}m^{\alpha(n-1)})\|f\|_{E_p^\alpha}.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует (28) для $q>2$.

Пусть теперь $1\leqslant p<q\leqslant 2$, $\alpha = 1/p-1/2$. Тогда, используя неравенство Гёльдера и уже доказанное выше неравенство, получаем

$$\|I(f)-T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_q} \leqslant \|I(f)-T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_2} \leqslant c2^{-\alpha m}m^{\alpha(n-1)}\|f\|_{E_p^\alpha}.$$

Следствие 5. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $2\leqslant p<q<\infty$, $\alpha = 1/p-1/q$, $T_{2^m}(f;x)$ – *функция, определенная равенством* (11). *Если* $f\in W_p^\alpha[0,1]^n$, *то имеет место неравенство*

$$\|I(f)-T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_q} \leqslant c\,\frac{m^{(n-1)\alpha}}{2^{\alpha m}}E_{G_m}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

Теорема 6. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $1<p<q<\infty$, $\alpha = 1/p-1/q$. *Если* $f\in W_p^\alpha[0,1]^n$, *то имеет место неравенство*

$$\|I(f)-T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_q} \leqslant c\,\frac{1}{2^{\alpha m}}\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

Доказательство. Пусть $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$, $f \sim \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} a_r e^{2\pi irx}$. Из теоремы 1 и неравенства Минковского имеем

$$\|I(f) - T_{2^m}(f;\,\cdot)\|_{L_q[0,1]^n} \leqslant 2^{-\alpha(m-n)} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k\in\mathbb{Z}_+^n}} \|A(f^\alpha;\alpha,u_k,v_k)\|_{L_q[0,1]^n}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha(s-\nu)} \sum_{\substack{k_\nu+\dots+k_{n-1}=s \\ k_j\in\mathbb{Z}_+}} \|A(f^\alpha;\alpha,u_{k,\nu},v_{k,\nu})\|_{L_q[0,1]^n}.$$

Здесь $f^\alpha \sim \sum_{r\in\mathbb{Z}^n} \overline{r}^\alpha a_r e^{2\pi irx}$, операторы $A(f;\alpha,u_k,v_k)$ и $A(f;\alpha,u_{k,\nu},v_{k,\nu})$ определяются равенством (8) из теоремы A, где

$$\begin{aligned} v_k = (2^{k_1},\dots,2^{k_n}), \qquad u_k &= (2^{k_1-1}\operatorname{sgn} k_1,\dots,2^{k_{n-1}-1}\operatorname{sgn} k_{n-1},0),\\ v_{k,\nu} &= (0,\dots,2^{k_\nu},\dots,2^{k_{n-1}},0),\\ u_{k,\nu} &= (0,\dots,2^{k_\nu-1}\operatorname{sgn} k_\nu,\dots,2^{k_{n-1}-1}\operatorname{sgn} k_{n-1},0). \end{aligned}$$

Применяя теорему A, учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} A(f^\alpha;\alpha,u_k,v_k) &= A((f-P_k)^\alpha;\alpha,u_k,v_k),\\ A(f^\alpha;\alpha,u_{k,\nu},v_{k,\nu}) &= A((f-P_k)^\alpha;\alpha,u_{k,\nu},v_{k,\nu}) \end{aligned}$$

для произвольного полинома $P_k(x) = \sum_{r\in Y_k} c_r e^{2\pi irx}$, получаем требуемое утверждение.

Пусть e – произвольный компакт из $[0,1)^n$ положительной меры $|e| > 0$; для интегрируемой на торе $[0,1)^n$ функции f рассмотрим функционал

$$T_{2^m}(f;e) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(r_j+\operatorname{sgn} k_j)}$$
$$\times \frac{1}{|e|}\int_e f\left(x_1+\frac{r_1}{2^{k_1}},\dots,x_n+\frac{r_n}{2^{k_n}}\right)dx.$$

Теорема 7. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, e – произвольный компакт положительной меры $|e|$ из $[0,1)^n$, $\alpha\neq 1/p$, $(x)_+ = \max\{x,0\}$, тогда*

$$|I(f) - T_{2^m}(f;e)| \leqslant c\,\frac{1}{2^{\alpha m}|e|^{(1/p-\alpha)_+}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}. \tag{29}$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6 с учетом того, что $L_q \hookrightarrow L_{q\infty}$ и

$$\|f\|_{L_{q\infty}} \sim \sup_{|e|>0} \frac{1}{|e|^{1-1/q}} \left| \int_e f(x)\,dx \right|$$

(см. [26]).

В (29) при $\alpha > 1/p$ правая часть не зависит от выбора компакта e. Поэтому, взяв в качестве e шар с центром в точке $x \in [0,1)^n$ радиуса r и перейдя к пределу при $r \to 0$, получим оценку погрешности квадратурной формулы классического вида:

$$|I(f) - T_{2^m}(f;x)| \leqslant c\,\frac{1}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

Теорема 8. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, e – компакт из $[0,1]^n$ положительной меры. Тогда для любой функции $f \in W_p^{1/p}[0,1]^n$ имеет место неравенство*

$$|I(f) - T_{2^m}(f;e)| \leqslant c\,\frac{\bigl|\log_2|e|\bigr|^n}{2^{\alpha m}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^{1/p}[0,1]^n}.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что константа c в неравенстве (29) оценивается через $c_1(\alpha-1/p)^{-n}$, где c_1 не зависит от p и α. Тогда при $1/q > 1/p$ имеем

$$\begin{aligned}
&|I(f) - T_{2^m}(f;e)| \\
&\quad\leqslant c_1\,\frac{1}{(1/q-1/p)^n|e|^{(1/q-1/p)}2^{m/p}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_q^{1/p}[0,1]^n}\\
&\quad\leqslant c_2\,\frac{1}{(1/q-1/p)^n|e|^{(1/q-1/p)}2^{m/p}} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ 0\leqslant k_j\leqslant m}} E_{Y_k}(f)_{W_p^{1/p}[0,1]^n}.
\end{aligned}$$

Минимизируя по параметру q ($q > 1/p$), получаем требуемое утверждение.

Список литературы

1. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Hlawka E.* Zur angendherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatsh. Math. 1962. V. 66. P. 140–151.
3. *Бахвалов Н. С.* О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1959. №4. С. 3–18.
4. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
5. *Фролов К. К.* Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. №4. С. 818–821.
6. *Wang Y.* Number theoretic method in numerical analysis // Contemp. Math. 1988. V. 77. P. 63–82.

7. *Темиргалиев Н. Т.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа, теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского ун-та. 1997. №3. С. 86–140.
8. *Темиргалиев Н. Т.* Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №2. С. 297–301.
9. *Воронин С. М., Темиргалиев Н. Т.* О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №2. С. 34–41.
10. *Темляков В. Н.* О восстановлении периодических функций нескольких переменных по значениям в узлах теоретико-числовых сеток // Anal. Math. 1986. V. 12. №4. P. 287–305.
11. *Темляков В. Н.* Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул // Матем. сб. 1990. Т. 181. №10. С. 1403–1413.
12. *Быковский В. А.* Оценки отклонений оптимальных сеток в L_p-норме и теория квадратурных формул // Anal. Math. 1996. Т. 22. С. 81–97.
13. *Фролов К. К.* Квадратурные формулы на классах функций // Дис. ... канд. физ.-матем. наук: ВЦ АН СССР, 1979.
14. *Skriganov M. M.* Construction of uniform distributions in terms of geometry of numbers // St. Petersbg. Math. J. 1995. V. 6. №3. P. 635–664.
15. *Смоляк С. А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. №5. С. 1042–1045.
16. *Темляков В. Н.* Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных // Матем. сб. 1985. Т. 128. №2. С. 256–268.
17. *Темляков В. Н.* О приближенном восстановлении периодических функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. №6. С. 1310–1313.
18. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263. №1. P. 149–167.
19. *Нурсултанов Е. Д.* О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №2. С. 235–248.
20. *O'Neil R. O.* Convolution operators and L_{pq} spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. P. 129–142.
21. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
22. *Nursultanov E. D.* Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. V. 4. №2. P. 277–290.
23. *Шарыгин И. Ф.* Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. С. 370–376.
24. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
25. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные свойства сетевых пространств // Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. Алматы, 1995. С. 38–44.
26. *Нурсултанов Е. Д.* Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сб. 1998. Т. 189. №3. С. 83–102.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова,
г. Астана, Казахстан;
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва,
г. Астана, Казахстан
E-mail: er-nurs@yandex.ru, tleukhanova@yandex.ru

Поступила в редакцию
11.02.2002 и 12.05.2003