Математический журнал. *Алматы. 2006. Том 6. № 2 (20) . С. 45 — 55*

УДК 517.51

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ АППРОКСИМАЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова
Караганда ул.Университетская, 28 aub-toibek@jandex.ru

В работе вводятся шкалы пространств стохастических процессов и интерполяционный метод для этих пространств, доказываются интерполяционные теоремы и теоремы вложения. На основе полученных результатов изучаются пространства типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Определения и обозначения. Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией, т.е. семейством $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$ σ-алгебр F_n таких, что $F_1 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ... \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин X_n такова, что для любого $n \geq 1$ величина X_n измерима относительно σ–алгебры F_n. Тогда говорят, что набор $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является стохастическим процессом.

В работе вводятся пространства стохастических процессов в некотором смысле являющиеся аналогами сетевых пространств, исследованных в работах [1], [2]. Эти пространства связаны с такими важными понятиями теории случайных процессов, как сходимость процесса, закон больших чисел, мартингальные свойства процесса.

Говорят ([3]), что стохастический процесс $(X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является мартингалом, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия: 1) $M|X_n| < \infty$; 2) $M(X_{n+1}|F_n) = X_n$ (Р.-п.н). Если вместо свойство 2) требуется, чтобы $M(X_{n+1}|F_n) \geq X_n$ (Р.-п.н.), то говорят, что процесс $X = (X_n, F_n)_{n=1}^{\infty}$ является субмартингалом.

Пусть $1 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, \alpha \geq 0$ и рассматриваемые стохастические процессы $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ являются мартингалами.

Обозначим при $0 < q < \infty$

$$N_p^{\alpha q}(F) = \left\{ X = (X_n, F_n)_{n\geq 1} : \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \overline{\Delta X_k})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

и при $q = \infty$

$$N_p^{\alpha\infty}(F) = \{X = (X_n, F_n)_{n\geq 1} : \sup_k 2^{\alpha k} \overline{\Delta X_k} < \infty\},$$

Keywords: *stochastic process, interpolation, Besov space, Haar's system*
2000 Mathematics Subject Classification: 60G07, 46B45

где

$$\overline{\Delta X_k} = \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right|.$$

Здесь и далее полагаем, что $X_{\frac{1}{2}}(\omega) \equiv 0$.

Пространства $N_p^{\alpha q}(F)$ являются пространствами сходящихся мартингальных процессов, где параметры α, q и p характеризуют скорость и метрику, в которой сходится данный процесс. Если $X \in N_p^{\alpha q}(F)$, то для любого $A \in \mathfrak{F}$ такого, что $P(A) > 0$, обобщенное условное среднее

$$\frac{1}{[P(A)]^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^k}) P(d\omega) \right|$$

стремится к нули так, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\alpha k} \frac{1}{(P(A))^{1-\frac{1}{p}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^k}) P(d\omega) \right| \right)^q.$$

Для этих пространств в работе доказывается интерполяционная теорема типа теоремы Марцинкевича, вводится интерполяционный метод, существенно связанный со свойствами моментов остановки. В последнем параграфе данный интерполяционный метод применяется к пространствам типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Случайная величина τ, принимающая значения в множестве $(1, 2, ..., \infty)$, называется марковским моментом относительно фильтрации $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$, если $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Моментом остановки называется марковский момент τ, для которого $\tau(\omega) < \infty$ (п.н)[3].

Пусть $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ – стохастический процесс, τ – марковский момент. Через X^τ обозначим "остановленный" процесс $X^\tau = (X_{n\wedge\tau}, F_n)_{n\geq 1}$, где $X_{n\wedge\tau} = \sum_{m=1}^{n-1} X_m \chi_{\tau=m}(\omega) + X_n \chi_{\tau\geq n}(\omega)$, $\chi_A(\omega)$ – характеристическая функция множества A. В частности, если $\tau(\omega) = k$ (п.н.), то

$$X^k = \{(X_1, F_1), (X_2, F_2), ..., (X_k, F_k), (X_k, F_{k+1}), (X_k, F_{k+2}), ...\}.$$

Известно ([3]), что если процесс $X = (X_n, F_n)_{n\geq 1}$ является мартингалом (субмартингалом), то процесс $X^\tau = (X_{n\wedge\tau}, F_n)_{n\geq 1}$ также является мартингалом (субмартингалом).

Пусть $T = \{T_n\}_{n=1}^\infty$ – преобразование стохастических процессов X, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$, в стохастические процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Lambda, \mathfrak{R}, Q)$ с фильтрацией $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\geq 1}$:

$$T(X) = \{T_n(X), \Phi_n\}_{n=1}^\infty.$$

Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $C > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\overline{(T_n(X) - T_n(Y))} \leq C\overline{(T_n(X - Y))}$.

Интерполяционный метод. Для построения теории интерполяции стохастических процессов нам помимо вещественного интерполяционного метода понадобится его некоторая модификация.

Пусть $\mathbf{A} = (A_0(F), A_1(F))$ – пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфова пространства $\mathfrak{N}(F)$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$. Очевидно, эта пара является совместимой парой и, следовательно, для нее определяется шкала интерполяционных пространств относительно вещественного метода [4].

Пусть $0<\theta<1$. При $0<q<\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta q}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\int\limits_0^\infty(t^{-\theta}K(t,X))^q\frac{dt}{t}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,X)<\infty\right\},$$

где

$$K(t,X;A_0,A_1)=\inf_{X=X_0+X_1}(\|X_0\|_{A_0}+t\|X_1\|_{A_1})$$

– функционал Петре.

Пусть $R=\{\tau_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$ – последовательность моментов остановок относительно фильтрации F, $A(F)=(A_0(F),A_1(F))$ – пара квазинормированных собственных подпространств $\mathfrak{N}(F)$. Определим для $X\in\mathfrak{N}(F)$ и $t\in(0,\infty)$ функционал

$$K_R(t,X)=K(t,X;A_0,A_1,R)=\inf_{\tau\in R}(\|X-X^\tau\|_{A_0}+t\|X^\tau\|_{A_1}).$$

Здесь точная нижняя грань берется по всем остановкам из R. При $0<q<\infty$

$$(A_0,A_1)^R_{\theta q}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\int\limits_0^\infty(t^{-\theta}K_R(t,X))^q\frac{dt}{t}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)^R_{\theta,\infty}=\left\{X\in\mathfrak{N}(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K_R(t,X)<\infty\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $(A_0(F),A_1(F)),(B_0(\Phi),B_1(\Phi))$ – две совместимые пары пространств стохастических процессов и $R=\{\tau(\omega)\}$ – некоторое фиксированное семейство марковских моментов относительно фильтрации F.*

Если T - квазилинейное отображение для стохастических процессов $X=(X_n,F_n)_{n\geq 1}$ и выполнены условия

$$\|T(X-X^\tau)\|_{B_0}\leq M_0\|X-X^\tau\|_{A_0},$$
$$\|T(X^\tau)\|_{B_1}\leq M_1\|X^\tau\|_{A_1}$$

для всех остановок $\tau\in R$, то верно неравенство

$$\|T(X)\|_{\mathbf{B}_{\theta\mathbf{q}}}\leq CM_0^{1-\theta}M_1^\theta\|X\|_{\mathbf{A}^R_{\theta q}}.$$

Здесь константа C из определения квазилинейности оператора T.

Доказательство.

$$\|T(X)\|_{\mathbf{B}_{\theta\mathbf{q}}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{T(X)=Y_0+Y_1}(\|Y_0\|_{B_0}+t\|Y_1\|_{B_1})\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q}\leq$$

$$\leq\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|T(X)-T(X^\tau)\|_{B_0}+t\|T(X^\tau)\|_{B_1}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac1q}\leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|T(X-X^\tau)\|_{B_0}+t\|T(X^\tau)\|_{B_1}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\leq CM_0\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\inf_{\tau\in R}(\|X-X^\tau\|_{A_0}+t\frac{M_1}{M_0}\|X^\tau\|_{A_1})\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=CM_0^{1-\theta}M_1^\theta\|X\|_{\mathbf{A}_{\theta q}^R(F)}.$$

Теорема доказана.

Лемма 1. [5] *Пусть* $a>1$, $R=\{k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *– остановки. Тогда при* $0<q<\infty$

$$\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta q}^R}\sim\left(\sum_{n=0}^\infty(a^{\theta n}K_R(a^n,X))^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta\infty}^R}\sim\sup_n a^{\theta n}K_R(a^n,X).$$

Пространство $N_p^{\alpha q}(F)$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha>0$, $0<q\leq\infty$, $1<p\leq\infty$. *Если процесс* $X=(X_n,F_n)_{n\geq1}\in N_p^{\alpha q}(F)$, *то существует случайная величина* X_∞ *такая, что* $X_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}X_\infty$ *(P - п.н.).*

Доказательство. Пусть $L_{p\infty}(\Omega)$ – пространство Марцинкевича-Лоренца. Воспользовавшись эквивалентной нормировкой (см.[1]) пространства $L_{p\infty}(\Omega)$ и измеримостью функции X_n относительно σ -алгебры F_n , получим

$$\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}\sim\sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_nP(d\omega)\right|=$$

$$=\sup_{A\in F_n,P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_nP(d\omega)\right|\leq\sup_{A\in F_{2^\nu},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A X_{2^\nu}P(d\omega)\right|,$$

здесь $\nu:\ 2^{\nu-1}\leq n<2^\nu$. Далее имеем

$$\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}\leq\sum_{k=0}^{\nu-1}\sup_{A\in F_{2^k},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A(X_{2^{k+1}}-X_{2^k})P(d\omega)\right|\leq\|X\|_{N_p^{01}(F)}.$$

Учитывая, что $N_p^{\alpha q}(F)\hookrightarrow N_p^{01}(F)$, при $\alpha>0$ получим $\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}\leq c\|X_n\|_{N_p^{\alpha q}(F)}$. Но $M|X_n|\leq c\|X_n\|_{L_{p\infty}[0,1]}$, поэтому по теореме Дуба [6] процесс X_n сходится почти наверное.

Приведем эквивалентную нормировку пространства $N_p^{\alpha q}(F)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0$, $0<q\leq\infty$, $1<p\leq\infty$. $X=(X_n,F_n)_{n\geq1}$ *– мартингал. Тогда*

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}(F)}\sim\left(\sum_{k=0}^\infty(2^{\alpha k}\widetilde{X_k})^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\widetilde{X_k}=\sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A(X_\infty-X_{2^{k-1}})P(d\omega)\right|.$$

Доказательство. Существование X_∞ следует из леммы 2. Далее имеем

$$\widetilde{X_k} = \sup_{A\in F_{2^k}} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A \sum_{m=k}^{\infty} (X_{2^m} - X_{2^{m-1}}) P(d\omega) \right| \le$$

$$\le \sum_{m=k}^{\infty} \sup_{A\in F_{2^m}} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^m} - X_{2^{m-1}}) P(d\omega) \right| = \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \widetilde{X_k})^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha k} \sum_{m=k}^{\infty} \overline{\Delta X}_m)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} (2^{m\varepsilon} \overline{\Delta X}_m) 2^{-m\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \left(\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m\varepsilon q'} \right)^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} \sim$$

$$\sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \overline{\Delta X}_m^q \sum_{k=0}^{m} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}(F)}.$$

Обратное неравенство верно в силу следующих соотношений, которые следуют из F_k- измеримости функции X_k и свойства субмартингальности процесса X:

$$\overline{\Delta X}_k = \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| =$$

$$= \sup_{A\in F_{2^k}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_{2^k} - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| \le$$

$$\le \sup_{A\in F_{2^k}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| \le$$

$$\le \sup_{A\in\mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A (X_\infty - X_{2^{k-1}}) P(d\omega) \right| = \widetilde{X_k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p, q, q_0, q_1 \le \infty$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $0 < \theta < 1$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $R = \{r\}_{r\in\mathbb{N}}$. *Тогда*

$$(N_p^{\alpha_0 q_0}(F), N_p^{\alpha_1 q_1}(F))_{\theta q}^R = N_p^{\alpha q}(F).$$

Доказательство. Используя лемму 1 и свойство вложения пространств $N_p^{\alpha q}(F)$, имеем

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0}, N_p^{\alpha_1 q_1})_{\theta q}^R} \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{\theta n} K(2^n, X))^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{\theta n} \inf_r (\|X - X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0 q_0}} + 2^{-n} \|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1 q_1}}))^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{\theta n} \inf_r (\|X - X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0 1}} + 2^{-n} \|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1 1}}))^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив $r = n\gamma$, получим

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0}, N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}} \le c \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^{\theta n} (\|X - X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_0 1}} + 2^{-n} \|X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_1 1}}))^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

Непосредственно из определения следует, что
$\overline{(\Delta X^{2^r})}_k = \overline{\Delta X}_k$ при $k = 0, 1, ..., r-1$; $\overline{(\Delta X^{2^r})}_k = 0$ при $k \ge r$,
$\overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k = 0$ при $k = 0, 1, ..., r-1$; $\overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k = \overline{\Delta X}_k$ при $k \ge r$, поэтому

$$\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha q}(F)} = \left(\sum_{k=0}^{r-1} (2^{\alpha k} \overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|X - X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha q}(F)} = \left(\sum_{k=r}^{\infty} (2^{\alpha k} \overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Подставив эти равенства при $q = 1$ в (1) и применив неравенство Минковского, оценим слагаемые в правой части (1):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\theta n} \sum_{k=n\gamma}^{\infty} (2^{\alpha_0 k} \overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\theta n q} \sum_{k=n\gamma}^{\infty} (2^{\alpha_0 k + \varepsilon k} \overline{\Delta X}_k)^q \sum_{k=n\gamma}^{\infty} (2^{-\varepsilon k q'})^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\theta n q - \varepsilon n \gamma q} \sum_{k=n\gamma}^{\infty} (2^{\alpha_0 k + \varepsilon k} \overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} = c \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{\alpha_0 k + \varepsilon k} \overline{\Delta X}_k)^q \sum_{n=0}^{\frac{k}{\gamma}} 2^{\theta n q - \varepsilon n \gamma q} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha_0 k + \varepsilon k q} \cdot 2^{\frac{\theta k q}{\gamma} - \varepsilon k q} (\overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1-\theta)} \sum_{k=0}^{n\gamma} (2^{\alpha_1 k} \overline{\Delta X}_k)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq(1-\theta)} \left(\sum_{k=0}^{n\gamma} 2^{\alpha_1 k - \varepsilon k} \overline{\Delta X}_k \cdot 2^{\varepsilon k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq(1-\theta)} \sum_{k=0}^{n\gamma} (2^{kq(\alpha_1 - \varepsilon)} \overline{\Delta X}_k) (\sum_{k=0}^{n\gamma} 2^{\varepsilon k q'})^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq + nq\theta + \varepsilon n \gamma q} \sum_{k=0}^{n\gamma} 2^{kq(\alpha_1 - \varepsilon)} \overline{\Delta X}^q_k \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha_1-\varepsilon)}\overline{\Delta X}_k^q \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq+nq\theta+\varepsilon n\gamma q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha_1-\frac{1-\theta}{\gamma})}\overline{\Delta X}_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Сделав подстановку $\gamma = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}$ в (2) и (3), получим

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\theta n}(\|X - X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_0 1}})^q\right)^{\frac{1}{q}} \le c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}}, \tag{4}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n}\|X^{2^{n\gamma}}\|_{N_p^{\alpha_1 1}})^q\right)^{\frac{1}{q}} \le c_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k\alpha}\overline{\Delta X_k})^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{N_p^{\alpha q}}. \tag{5}$$

Применив неравенство Минковского и подставив (4) и (5) в (1), имеем

$$\|X\|_{(N_p^{\alpha_0 q_0}, N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}} \le c\|X\|_{N_p^{\alpha q}}.$$

Для доказательства противоположной оценки воспользуемся тем, что для любых r и k выполнено равенство

$$\overline{\Delta X}_k = \overline{\Delta(X - X^{2^r})}_k + \overline{(\Delta X^{2^r})}_k.$$

Имеем

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(2^{\alpha_0 k}\overline{\Delta(X-X^{2^r})}_k + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\cdot 2^{\alpha_1 k}\overline{(\Delta X^{2^r})}_k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(\sup_k 2^{\alpha_0 k}\overline{\Delta(X-X^{2^r})}_k + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\cdot \sup_k 2^{\alpha_1 k}\overline{(\Delta X^{2^r})}_k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\alpha k-\alpha_0 k}(\|X - X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_0\infty}} + 2^{\alpha_0 k-\alpha_1 k}\|X^{2^r}\|_{N_p^{\alpha_1\infty}})\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь, сделав подстановку $2^{\alpha_1-\alpha_0} = a$ и используя лемму 1, получим

$$\|X\|_{N_p^{\alpha q}} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}(a^{\theta k}\cdot K(a^k, X, N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty}))^q\right)^{\frac{1}{q}} \sim \|X\|_{(N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty})^R_{\theta q}}.$$

Что и доказывает теорему, так как $(N_p^{\alpha_0 q_o}, N_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q} \hookrightarrow (N_p^{\alpha_0\infty}, N_p^{\alpha_1\infty})^R_{\theta q}$.

Приведем пример фильтрации, которую в дальнейшем будем называть фильтрацией Хаара.

Пусть $\Omega = [0,1]$, P – мера Лебега, $n \in \mathbb{N}$, $F_1 = \{\Omega, \varnothing\}, F_2 - \sigma$-алгебра, порожденная подмножествами $[0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]$, т.е. $F_2 = \{\Omega, [0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1], \varnothing\}$. При $2^n < k \le 2^{n+1}$ обозначим $a_{n,k} = 2^{-n}(k - 2^n - 1)$ и определим F_k как $\sigma-$ алгебру, порожденную набором

$$\{[0, \frac{1}{2^{n+1}}], (\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{2^n}], ..., (a_{n,k} - \frac{1}{2^{n+1}}, a_{n,k}], (a_{n,k}, a_{n,k} + \frac{1}{2^{n+1}}],$$

$$(a_{n,k}+\frac{1}{2^{n+1}},a_{n,k}+\frac{1}{2^n}],(a_{n,k}+\frac{1}{2^n},a_{n,k}+\frac{1}{2^{n-1}}],(a_{n,k}+\frac{1}{2^{n-1}},a_{n,k}+\frac{3}{2^n}],...,(1-\frac{1}{2^n},1]\}.$$

Заметим, что если $\{H_k(\omega)\}_{k\ge1}$ – система Хаара, а $F=\{F_k\}_{k\ge1}$ – фильтрация, определенная в предыдущем примере, $\{c_k\}_{k\ge1}$ – некоторая числовая последовательность, то процесс $X=(X_n,F_n)_{n\ge1}$, где $X_n(\omega)=\sum_{k=1}^n c_kH_k(\omega)$, является мартингальным процессом.

Пространства с переменными аппроксимационными свойствами. Существенная часть конструкции введенного выше интерполяционного метода основана на мартингальных свойствах стохастических процессов и использовании понятия момента остановки. Рассмотрим применение введенного интерполяционного метода к пространствам типа пространств Бесова с переменными аппроксимационными свойствами.

Пусть $\Omega=[0,1]$, $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств множества Ω, P – линейная мера Лебега на $\mathfrak{F}$, $F=\{F_n\}_{n\ge1}$ - фильтрация Хаара, $R=\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность моментов остановки такая, что для любого $k\ge0$ выполнены условия: $\tau_k\le\tau_{k+1}$ ($P-$ п.н.) и

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k(\omega)=\infty \qquad \text{(Р-п.н.)} \tag{6}$$

Для функции $f(x)\in L[0,1]$ обозначим через $c_k(f)$ коэффициенты Фурье по системе $\{H_k(x)\}_{k\ge1}$ функций Хаара [7]. Для заданного момента остановки $\tau_k(\omega)$ обозначим

$$S(f,\tau_k)(\omega)=\sum_{m=1}^{\tau_k(\omega)}c_m(f)H_m(\omega)$$

и назовем ее частичной суммой Фурье–Хаара функции f, соответствующей марковскому моменту τ_k.

Пусть $1<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Через $B_p^{\alpha q}[R]$ обозначим множество функций $f\in L[0,1]$, для которых при $0<q<\infty$

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{\alpha kq}\left\|f-S(f,\tau_k)\right\|_{L_p}^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

и

$$\|f\|_{B_p^{\alpha\infty}[R]}=\sup_k 2^{\alpha k}\left\|f-S(f,\tau_k)\right\|_{L_p}<\infty.$$

В идейном плане введенные пространства близки к пространствам с переменной гладкостью. Здесь отметим работы H.-G.Leopold [8], F.Cobos and D.L.Fernandez [9], O.V.Besov [10] – [13].

Лемма 3. *Пусть $1<p<\infty$, $f\in L_p[0,1]$, $S(f,\tau)$ – частичная сумма Фурье–Хаара, соответствующая марковскому моменту τ. Тогда верно неравенство*

$$\|S(f,\tau)\|_p\le c\|f\|_p.$$

Доказательство. Обозначим

$$F_\tau=\{A\in\mathfrak{F}:\quad A\cap\{\tau=n\}\in F_n \quad \text{для любого} \quad n\ge1\}.$$

Пусть $L_{p\infty}[0,1]$ – пространство Марцинкевича–Лоренца. Воспользовавшись эквивалентной нормировкой (см.[1]) пространства $L_{p\infty}[0,1]$ и мартингальными свойствами частичных сумм Фурье–Хаара, получим

$$\|S(f,\tau)\|_{L_{p\infty}[0,1]}\sim\sup_{A\in\mathfrak{F},P(A)>0}\frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A S(f,\tau)P(d\omega)\right|=$$

$$= \sup_{A\in F_\tau, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A S(f,\tau)P(d\omega) \right| = \sup_{A\in F_\tau, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A f(\omega)P(d\omega) \right| \le$$

$$\le \sup_{A\in \mathfrak{F}, P(A)>0} \frac{1}{(P(A))^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_A f(\omega)P(d\omega) \right| = \|f\|_{L_{p\infty}[0,1]} .$$

Теперь, применив интерполяционную теорему (см.[4]), получим утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(f,\tau_k) = \sum_{r=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} c_r(f)H_r(\omega).$$

Тогда

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Доказательство. Покажем, что

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

В силу условия (6) и того факта, что система Хаара является базисом в $L_p[0,1]$, имеем

$$\|f - S(f,\tau_k)\|_{L_p} = \left\| \sum_{m=k}^{\infty} \Delta(f,\tau_m) \right\|_{L_p} \le \sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} ,$$

следовательно,

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Используя неравенство Гельдера, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \left(\sum_{m=k}^{\infty} (2^{m\varepsilon} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}) 2^{-m\varepsilon} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k q} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p} \left(\sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m\varepsilon q'} \right)^{\frac{q}{q'}} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= c_1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\varepsilon q} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \sum_{k=0}^{m} 2^{kq(\alpha-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}} \le c \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{\alpha m} \|\Delta(f,\tau_m)\|_{L_p}^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Обратное неравенство следует из леммы 2, в которой вместо f положим $\sum_{\tau_k}^{\infty} c_k(f)H_k(f)$, а вместо τ положим τ_{k+1}. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le q_0, q_1, q \le \infty, 0 < \alpha_0 < \alpha_1, 0 < \theta < 1, \quad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$. *Тогда*

$$(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R = B_p^{\alpha q}[R].$$

Доказательство. Используя лемму 1 при $1 \le q \le \infty$, имеем

$$\|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_{pR}^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R} \sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2^{\theta n} K(2^n, f))^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \inf_r \left(\left(\sum_{k=r}^{\infty} 2^{\alpha_0 k q_0} \|\Delta(f,\tau_k)\|^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +2^{-n} \left(\sum_{k=0}^{r-1} 2^{\alpha_1 k q_1} \|\Delta(f,\tau_k)\|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \inf_r \left(\sum_{k=r}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\| + 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{r-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \left(\sum_{k=n\gamma}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\| + 2^{-n}\sum_{k=0}^{n\gamma-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n} \sum_{k=n\gamma}^{\infty} 2^{\alpha_0 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{\theta n - n} \sum_{k=0}^{n\gamma-1} 2^{\alpha_1 k} \|\Delta(f,\tau_k)\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (7)$$

Далее, оценив каждое слагаемое в правой части (7) по такой же схеме, что и оценки для (1) в доказательстве теоремы 3, получим

$$\|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R} \le c\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]}.$$

Покажем обратное вложение. Пусть $f \in (B_p^{\alpha_0 q_0}[R], B_p^{\alpha_1 q_1}[R])_{\theta q}^R, \qquad f = f_0 + f_1$ – произвольное представление функции f, где $f_0 \in B_p^{\alpha_0 q_0}[R], \quad f_1 \in B_p^{\alpha_1 q_1}[R]$.

$$2^{\alpha k}\|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p} \le 2^{\alpha k}(\|\Delta(f_0,\tau_k)\|_{L_p} + \|\Delta(f_1,\tau_k)\|_{L_p}) \le$$

$$\le 2^{(\alpha-\alpha_0)k}(\sup_{r\in\mathbb{N}} 2^{\alpha_0 k}\|\Delta(f_0,\tau_k)\|_{L_p} + 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}\sup_{r\in\mathbb{N}} 2^{\alpha_1 k}\|\Delta(f_1,\tau_k)\|_{L_p}) =$$

$$= 2^{(\alpha-\alpha_0)k}(\|f_0\|_{B_p^{\alpha_0\infty}[R]} + 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}\|f_1\|_{B_p^{\alpha_1\infty}[R]}).$$

В силу произвольности представления $f = f_0 + f_1$ имеем

$$2^{\alpha k}\|\Delta(f,\tau_k)\|_{L_p} \le 2^{(\alpha-\alpha_0)k} K_R(f, 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k}; B_p^{\alpha_0\infty}[R], B_p^{\alpha_1\infty}[R]).$$

Следовательно, положив $a = 2^{\alpha_0-\alpha_1}$, имеем

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}[R]} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-(\alpha_0-\alpha_1)\theta k} K_R(f, 2^{(\alpha_0-\alpha_1)k})\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(a^{\theta k} K_R(f, a^k) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \sim \|f\|_{(B_p^{\alpha_0 \infty}, B_p^{\alpha_1 \infty})^R_{\theta q}} \leq c \|f\|_{(B_p^{\alpha_0 q_0}, B_p^{\alpha_1 q_1})^R_{\theta q}}.$$

Теорема доказана.

Цитированная литература

1. **Нурсултанов Е.Д.** // East J. App.1998. № 3.
2. **Нурсултанов Е.Д.** // Матем. сборник. 1998. Т. 189, № 3. С.83–102.
3. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М. 1980.
4. **Берг Й., Лефстрем Й.** Интерполяционные пространства. Введение. М., 1980.
5. **Аубакиров Т.У.** // Вестник Карагандинского университета. Сер. математика. 2005. № 1(37), С.29-35.
6. **Дуб Дж.Л.** Вероятностные процессы. М. 1956.
7. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М. 1989.
8. **Leopold H.-G.** // Forum Math. 3. 1991. № 1. P.1-21.
9. **Cobos F., Fernandez D.L.** // In: Function Space and Applications, Proc. US-Semin., Lund, Lect. Notes Math. 1988. V.1302. P.158-170.
10. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 1997. V.219. P.80-102(Russian); English trasl.in Proc.Steklov Inst. Math. 1997. V.219. P.73-95.
11. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 1999. V.227. P.56-74(Russian); English trasl.in Proc.Steklov Inst. Math. 1999. V.227. P.50-69.
12. **Besov O.V.** // Trudy Mat.Inst.Steklova 2003. V.243. P. 87-95.
13. **Besov O.V.** // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic. 2005.

Поступила в редакцию 10.02.2006г.