Об интерполяции и теоремах вложения пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

1. Интерполяционный метод для анизотропных пространств. Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $\mathbf{A}=(A_1,A_2)$ обозначим пространство A_1-значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1}\in A_2$ с нормой $\|f\|_{\mathbf{A}}=\|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$.

Пусть $\mathbf{A}_0=(A_1^0,A_2^0)$ и $\mathbf{A}_1=(A_1^1,A_2^1)$ – два анизотропных пространства, $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_i=0$ или $\varepsilon_i=1,\ i=1,2\}$. Для произвольного $\varepsilon\in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon=(A_1^{\varepsilon_1},A_2^{\varepsilon_2})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon}=\|\|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}}\|_{A_2^{\varepsilon_2}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A}_0=(A_1^0,A_2^0)$ и $\mathbf{A}_1=(A_1^1,A_2^1)$ назовем *совместимой*, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon\in E$.

Для элемента $a\in\sum_{\varepsilon\in E}A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\mathbf{t},a;\mathbf{A})=\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon\in E}\mathbf{t}^\varepsilon\|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon}.$$

Пусть $\mathbf{0}<\theta=(\theta_1,\theta_2)<\mathbf{1}$, $\mathbf{0}<\mathbf{r}=(r_1,r_2)\leqslant\infty$. Для произвольной перестановки $\star=(j_1,j_2)$ множества $\{1,2\}$, через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star}=(A_\varepsilon;\varepsilon\in E)_{(\theta_1,\theta_2),(r_1,r_2),\star}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon\in E}\mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star}}=\biggl(\int_0^\infty\biggl(\int_0^\infty(t_{j_1}^{-\theta_{j_1}}t_{j_2}^{-\theta_{j_2}}K(\mathbf{t},a;\mathbf{A}))^{r_{j_1}}\frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}}\biggr)^{r_{j_2}/r_{j_1}}\frac{dt_{j_2}}{t_{j_2}}\biggr)^{1/r_{j_2}}<\infty.$$

Лемма 1 [1]. *Пусть $\mathbf{0}<\theta<\mathbf{1}$, $\mathbf{0}<\mathbf{r}\leqslant\infty$, $\star=(j_1,j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1,2\}$, $\mathbf{A}=\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$, $\mathbf{B}=\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$ – два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $\mathbf{M}_0=(M_1^0,M_2^0)$, $\mathbf{M}_1=(M_1^1,M_2^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T\colon A_\varepsilon\to B_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon\prod_{i=1}^2M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon\in E$, то*

$$T\colon\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star}\to\mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}\star}$$

с нормой $\|T\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}\star}\to\mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}\star}}\leqslant\max_{\varepsilon\in E}C_\varepsilon\prod_{i=1}^2(M_i^0)^{1-\theta_i}(M_i^1)^{\theta_i}$.

2. Пространства $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ и их интерполяция. Для $1\leqslant p,\tau\leqslant\infty$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *пространством Лоренца* $L_{pq}(\Omega)$ назовем множество измеримых на Ω функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p\tau}(\Omega)}=\begin{cases}\biggl(\displaystyle\int_0^\infty(t^{1/p}f^*(t))^\tau\frac{dt}{t}\biggr)^{1/\tau} & \text{при } 1\leqslant p,\tau<\infty,\\ \sup_{t>0}t^{1/p}f^*(t) & \text{при } 1\leqslant p\leqslant\infty,\ \tau=\infty,\end{cases}$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x)$.

Пусть $-\infty<\sigma<\infty$, $1\leqslant q,p,\tau\leqslant\infty$ и $\star=(j_1,j_2)$ – некоторая перестановка множества $\{1,2\}$. Определим пространство $\overset{\star}{\mathfrak{L}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$, как множество последовательностей

$a=\{a_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $a_k(x)$ – измеримые на Ω функции, для которых конечна норма: при $\star=(1,2)$

$$\|a\|_{\overset{\star}{\mathfrak{L}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)}=\biggl(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2^{\sigma k}\|a_k\|_{L_{p\tau}})^q\biggr)^{1/q},$$

а при $\star=(2,1)$

$$\|a\|_{\overset{\star}{\mathfrak{L}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)}=\biggl\|\biggl(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2^{\sigma k}a_k^*(\,\cdot\,))^q\biggr)^{1/q}\biggr\|_{L_{p\tau}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $-\infty<\sigma_0\ne\sigma_1<+\infty$, $1\leqslant q_0,q_1\leqslant\infty$, $1\leqslant p_0\ne p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant\tau_0,\tau_1\leqslant\infty$ *и* $\star_\varepsilon=(j_1^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)},j_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})$ *– некоторые перестановки множества* $\{1,2\}$ *для всех* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E$. *Тогда для* $0<\theta_1$, $\theta_2<1$, $1\leqslant r_1$, $r_2\leqslant\infty$ *и* $\star=(j_1,j_2)$ *– некоторой перестановки множества* $\{1,2\}$, *справедливо равенство*

$$(\overset{\star_\varepsilon}{\mathfrak{L}}{}^{\sigma_{\varepsilon_2}q_{\varepsilon_2}}_{p_{\varepsilon_1}\tau_{\varepsilon_1}}(\Omega);\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E)_{(\theta_1,\theta_2),(r_1,r_2),\star}=\overset{\star}{\mathfrak{L}}{}^{\sigma r_2}_{pr_1}(\Omega),$$

где $\sigma=(1-\theta_2)\sigma_0+\theta_2\sigma_1$, $1/p=(1-\theta_1)/p_0+\theta_1/p_1$.

Для $-\infty<\sigma<\infty$, $1<p<\infty$, $1\leqslant q$, $\tau\leqslant\infty$ и $\star=(j_1,j_2)$ – некоторой перестановки множества $\{1,2\}$, пространство $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ определим как множество функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)}=\|\{f*\varphi\}\|_{\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)},$$

где $\varphi(\xi)=\{\varphi_k(\xi)\}_{k=0}^{\infty}$ – разбиение единицы на области Ω, $(f*\varphi)(x)=\int_\Omega f(x-y)\varphi(y)\,dy$ – свертка функций f, φ.

Пространство $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ при $\star=(1,2)$ является пространством типа пространства Бесова $B^\sigma_{pq(\tau)}(\mathbb{R}^n)$ (см. [2], [3]), а при $\star=(2,1)$ – несколько схоже по определению с пространством типа Лизоркина–Трибеля $F^\sigma_{pq(\tau)}(\mathbb{R}^n)$ (см. [3]), однако в отличие от него, операция взятия невозрастающей перестановки применена не к функции $f_{\sigma q}(x)=(\sum_{k=0}^\infty(2^{\sigma k}\times|(\varphi_k*f)(x)|)^q)^{1/q}$, а к каждой из функций $(\varphi_k*f)(x)$, $k=0,1,2,\dots$.

Теорема 2. *Пусть* $W^{\sigma_{\varepsilon_2}}_{p_{\varepsilon_1}}(\Omega)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E$, *– пространства Соболева, и* $\sigma_0\ne\sigma_1\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p_0\ne p_1\leqslant\infty$. *Тогда для* $0<\theta_1,\theta_2<1$, $1\leqslant r_1,r_2\leqslant\infty$ *и* $\star=(j_1,j_2)$ *– некоторой перестановки множества* $\{1,2\}$, *справедливо равенство*

$$(W^{\sigma_{\varepsilon_2}}_{p_{\varepsilon_1}}(\Omega);\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E)_{(\theta_1,\theta_2),(r_1,r_2),\star}=\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma r_2}_{pr_1}(\Omega),$$

где $\sigma=(1-\theta_2)\sigma_0+\theta_2\sigma_1$, $1/p=(1-\theta_1)/p_0+\theta_1/p_1$.

Теорема 2 показывает, что результат интерполяции пространств Соболева приводит к пространствам типа пространств Бесова и типа пространств Лизоркина–Трибеля в зависимости от параметра $\star$. Этот факт позволяет нам рассматривать эти пространства как единную шкалу простанств.

Теорема 3. *Пусть* $-\infty<\sigma_0\ne\sigma_1<+\infty$, $1\leqslant q_0,q_1\leqslant\infty$, $1\leqslant p_0\ne p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant\tau_0,\tau_1\leqslant\infty$ *и* $\star_\varepsilon=(j_1^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)},j_2^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})$ *– некоторые перестановки множества* $\{1,2\}$ *для всех* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E$. *Тогда для* $0<\theta_1,\theta_2<1$, $1\leqslant r_1,r_2\leqslant\infty$ *и* $\star=(j_1,j_2)$ *– некоторой перестановки множества* $\{1,2\}$, *справедливо равенство*

$$(\overset{\star_\varepsilon}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma_{\varepsilon_2}q_{\varepsilon_2}}_{p_{\varepsilon_1}\tau_{\varepsilon_1}}(\Omega);\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E)_{(\theta_1,\theta_2),(r_1,r_2),\star}=\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma r_2}_{pr_1}(\Omega),$$

где $\sigma=(1-\theta_2)\sigma_0+\theta_2\sigma_1$, $1/p=(1-\theta_1)/p_0+\theta_1/p_1$.

Теорема 3 показывает, что шкала пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ замкнута относительно данного интерполяционного метода, т.е. результат интерполяции пространств описывается пространством из этой же шкалы. Здесь следует отметить, что шкалы пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля не замкнуты относительно вещественного интерполяционного метода.

3. Теоремы вложения разных метрик и измерений для пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\mathbb{R}^n)$. Применяя теоремы 2, 3 к теоремам вложения разных метрик и измерений для пространств Соболева, Бесова или Лизоркина–Трибеля [2]–[4], получаем соответствующие теоремы для пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$.

Теорема 4. *Пусть* $-\infty < \sigma_0 < \sigma_1 < \infty$, $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q, \tau \leqslant \infty$ *и* $\star = (j_1, j_2)$ – *некоторая перестановка множества* $\{1,2\}$. *Тогда при* $\sigma_0 - n/p_0 \leqslant \sigma_1 - n/p_1$ *справедливо вложение*

$$\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma_1 q}_{p_1 \tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma_1 q}_{p_0 \tau}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$; положим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Для функций f из пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{R}$, действующий по следующему правилу:

$$\mathfrak{R} f(x') = \biggl\{ f(x',0), \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',0), \dots, \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x',0) \biggr\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q, \tau \leqslant \infty$ *и* $\star = (j_1, j_2)$ – *некоторая перестановка множества* $\{1,2\}$; *тогда при* $\sigma > r + 1/p$ *оператор* $\mathfrak{R}$ *является ретракцией* $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\mathbb{R}^n)$ *на* $\prod_{j=0}^{r} \overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{(\sigma - 1/p - j) q}_{p\tau}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Отметим, что в отличие от пространств Лизоркина–Трибеля введенная шкала пространств $\overset{\star}{\mathfrak{B}}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ замкнута относительно теорем вложения разных измерений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Е. Д. Нурсултанов, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 22–25. **[2]** Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. **[3]** Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980. **[4]** О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

К. А. Бекмаганбетов
Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Поступило
15.05.2008

Е. Д. Нурсултанов
Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: er-nurs@yandex.ru