Математический журнал. *Алматы. 2007. Том 7. № 1 (23) . С.36 – 48*

УДК 517.51

МЕТОД МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
г.Караганда, ул. Университетская 28

В статье вводится метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств, изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Лебега. Показано, что результатом интерполяции пространств Лебега со смешанной метрикой относительно введенного метода является многопараметрическое анизотропное пространство Лебега.

Интерполяционные методы функциональных пространств являются одним из мощных аппаратов математического анализа. Исследованиям в данной области посвящены работы многих авторов, результаты которых отражены в монографиях Й. Берга, Й. Лефстрема [1], Х. Трибеля [2], Ю.А. Брудного, С.Г. Крейна, Е.М. Семенова [3].

Однако до сих пор остается много проблем в теории интерполяции анизотропных пространств. Исследованию данного вопроса посвящены работы Г. Спарра [4], Д.Л. Фернандеса [5] – [7], Ф. Кобоша и Ж. Петре [8], Крепкогорского [9] – [11] и других. В работе Е.Д. Нурсултанова [12] введен и изучен метод интерполяции для анизотропных пространств, который позволил описать пространства, полученные интерполированием пространств Лебега со смешанной метрикой.

Данная работа продолжает исследования в данном направлении.

В первой части работы вводятся анизотропные пространства Лебега, являющиеся обобщением пространств Лебега со смешанной нормой [13] и анизотропных пространств Лоренца [12], изучены их свойства.

Во второй части работы вводится метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств, изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Лебега относительно данного метода.

Keywords: *interpolation, multi parametric anisotropic Lebeg space, Lebeg spaces with mixed metrics*
2000 Mathematics Subject Classification: 46B70, 46M35

Анизотропные пространства Лебега.

Пусть $\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$, тогда $1/\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 1/p_{11} & \dots & 1/p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/p_{n1} & \dots & 1/p_{nm} \end{pmatrix}$. Выражение $\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}_1$ понимается как обычное сложение матриц. Отношения $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1$, $\vec{\mathbf{p}} \geqslant \vec{\mathbf{p}}_1$ и $\vec{\mathbf{p}} > \vec{\mathbf{p}}_1$ означают соответственно выполнение отношений $p_{ij} = p^1_{ij}$, $p_{ij} \geqslant p^1_{ij}$ и $p_{ij} > p^1_{ij}$ для всех i и j. Запись $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_m})$ означает, что $\mathbf{p_j} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$ для $j = 1, \dots, m$. Для вектора $\mathbf{k} = (k_1, \dots k_n)$ выражение $\mathbf{k}^{\mathbf{p_j}}$ означает $k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n}$.

Пусть $\{a\} = \{a_{k_1,\dots,k_n}\}$ – последовательность, определенная в $\mathbb{N}^m = \mathbb{N}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{m_n}$, $* = (*_1, \dots, *_n) = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $\{1, \dots, n\}$. Через $\{a^*\} = \left\{a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n}\right\}_{\mathbf{l=1}}^{\infty}$ обозначим последовательность, полученную применением невозрастающей перестановки к последовательности $\{a_{k_1,\dots,k_n}\}_{\mathbf{k=1}}^{\infty}$ последовательно по индексам $k_{j_1}, \dots, k_{j_n}$. Данную последовательность $\{a^*\}$ назовем невозрастающей перестановкой последовательности $\{a\}$, соответствующей вектору $* = (*_1, \dots, *_n)$.

Аналогично для измеримой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, заданной в $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n}$, через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ в $\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n}$, считая остальные переменные фиксированными. Данную функцию $f^*(\mathbf{t})$ будем называть *невозрастающей перестановкой функции f в $\mathbb{R}^m = (\mathbb{R}^{m_1}, \dots, \mathbb{R}^{m_n})$*, соответствующей вектору $* = (*_1, \dots, *_n)$.

Пусть $0 < \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$, то есть $0 < p_{ij} \leqslant \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, при этом, если $p_{ij} = \infty$, то будем считать, что $p_{ij+1} = \dots = p_{im} = \infty$. Далее везде при $p = \infty$ выражения $\left(\int_b^a (f(t))^p \, dt\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{k=m}^{n} (a_k)^p\right)^{1/p}$ понимаем как $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$ и $\sup\limits_{m \leqslant k \leqslant n} a_k$ соответственно.

Дискретным анизотропным пространством Лебега $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ назовем множество всех последовательностей $\{a\}$, для которых конечна величина

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a),$$

где функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a) = \Phi^*_{\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_m}(a)$ определяется следующим образом.

Пусть

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} |a_{k_1,\dots,k_n}|^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}}.$$

Далее положим

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}(f) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\xi_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{12}}\right)^{p_{22}/p_{12}} \dots \right)^{1/p_{n2}},$$

где последовательность

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(a) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \dots \left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n}\right)^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}}. \tag{1}$$

Положим

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_{m-1}}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\cdots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}(\xi_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\cdots\right)^{1/p_{nm-1}}. \tag{2}$$

Тогда функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(a) = \Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_m}(a)$ определяется следующим образом:

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_m}(a) = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty}\cdots\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}(\eta_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\cdots\right)^{1/p_{nm-1}}, \tag{3}$$

где последовательность

$$\eta_{k_1,\dots,k_n}(a) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\cdots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1}\left(\xi^{*_1,\dots *_n}_{l_1,\dots,l_n}(a)\right)^{p_{1m-1}}\right)^{p_{2m-1}/p_{1m-1}}\cdots\right)^{1/p_{nm-1}} \tag{4}$$

и $\xi^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n}(a)$ – из представления (2).

Анизотропным пространством Лебега $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)$ назовем множество измеримых в $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{m_n}$ функций f, для которых

$$\|f\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)} = \Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(f) < \infty,$$

где функционал $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(f)$ определяется следующим образом:

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1}(f) = \left(\int_0^{\infty}\cdots\left(\int_0^{\infty}|f(t_1,\dots,t_n)|^{p_{11}}\,dt_1\right)^{p_{21}/p_{11}}\cdots dt_n\right)^{1/p_{n1}},$$

а

$$\Phi^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_m}(f) = \Phi^*_{\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_m}(\xi(f)),$$

где последовательность

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(f) = \left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}}\cdots\left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}(f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)dt_1)^{p_{11}}\right)^{p_{21}/p_{11}}\cdots dt_n\right)^{1/p_{n1}} \tag{5}$$

и функционал $\Phi^*_{\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_m}(\cdot)$ определен равенством (3).

Пространство $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$, где $\Omega = \Omega_1\times\ldots\times\Omega_n, \Omega_j\subset\mathbb{R}^{m_j}$, определяется нормой

$$\|f\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)} = \|f_\Omega\|_{L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\mathbb{R}^m)},$$

где f_Ω – нулевое продолжение функции f с области Ω на все $\mathbb{R}^m$.

Пусть $0 < \vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m) \leqslant \infty$. Для $0 < \vec{\mathbf{h}} = (\mathbf{h}_1,\dots,\mathbf{h}_{m-1}) \leqslant \infty$ определим функционал $\Phi^{\vec{\mathbf{h}}*}_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$ также, как и $\Phi^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$, только $\eta_{k_1,\dots,k_n}(\cdot)$ в формуле (4) будут определяться, как

$$\eta^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\dots,k_n}(\cdot) = \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\cdots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} l_1^{\frac{h_{1m-1}}{p_{1m-1}}-1}\cdots l_n^{\frac{h_{nm-1}}{p_{nm-1}}-1}\left(\xi^{*_1,\dots *_n}_{l_1,\dots,l_n}(\cdot)\right)^{h_{1m-1}}\right)^{\frac{h_{2m-1}}{h_{1m-1}}}\cdots\right)^{\frac{1}{h_{nm-1}}},$$

а $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(a)$ и $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(f)$ в формулах (1) и (5) соответственно:

$$\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(a)=\left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1}\cdots\left(\sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} l_1^{h_{11}/p_{11}-1}\ldots l_n^{h_{n1}/p_{n1}-1}\left(a^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}\right)^{h_{11}}\right)^{h_{21}/h_{11}}\cdots\right)^{1/h_{n1}},$$

$$\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(f)=\left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}}\cdots\left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}\left(t_1^{1/p_{11}}\ldots t_n^{1/p_{n1}}f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)\right)^{h_{11}}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{h_{21}/h_{11}}\cdots\frac{dt_n}{t_n}\right)^{1/h_{n1}}.$$

Лемма 1. *Для* $0<\vec{\mathbf{p}}=(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m)\leqslant\infty$ *и* $0<\vec{\mathbf{h}}=(\mathbf{h}_1,\ldots,\mathbf{h}_{m-1})\leqslant\infty$ *функционал* $\Phi^{\vec{\mathbf{h}}*}_{\vec{\mathbf{p}}}(\cdot)$ *определяет эквивалентную нормировку анизотропных пространств Лебега.*

Доказательство. Для последовательности $\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)$, невозрастающей по каждому индексу, имеем

$$C_1^1\sup_{\substack{2^{k_1}\leqslant l_n<2^{k_1+1}\\ 2^{k_n}\leqslant l_n<2^{k_n+1}}} l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)\leqslant\eta_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)\leqslant$$

$$\leqslant C_1^2\sup_{\substack{2^{k_1-1}\leqslant l_n<2^{k_1}\\ 2^{k_n-1}\leqslant l_n<2^{k_n}}} l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)$$

и

$$C_2^1\sup_{\substack{2^{k_1}\leqslant l_n<2^{k_1+1}\\ 2^{k_n}\leqslant l_n<2^{k_n+1}}} l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot)\leqslant\eta^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(\cdot)\leqslant$$

$$\leqslant C_2^2\sup_{\substack{2^{k_1-1}\leqslant l_n<2^{k_1}\\ 2^{k_n-1}\leqslant l_n<2^{k_n}}} l_1^{\overline{\frac{1}{p_{1m-1}}}}\ldots l_n^{\overline{\frac{1}{p_{nm-1}}}}\xi^{*_1,\ldots,*_n}_{l_1,\ldots,l_n}(\cdot).$$

Аналогичные оценки получаем для $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(a)$ и $\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(a)$, $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(f)$ и $\xi^{\vec{\mathbf{h}}}_{k_1,\ldots,k_n}(f)$.

Замечание 1.*При* $m=1$ *пространства* $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ *представляют собой дискретные пространства Лебега* $l_{\mathbf{p}}$, *в случае* $m=2$ *– дискретные анизотропные пространства Лоренца* $l^*_{\mathbf{pq}}$, *а пространства* $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ *– пространства Лебега* $L_{\mathbf{p}}$ *и анизотропные пространства Лоренца* $L^*_{\mathbf{pq}}$ *соответственно (см. [13], [12]).*

Теорема 1. а) *Пусть* $\mathbf{0}<\vec{\mathbf{p}_1}\leqslant\vec{\mathbf{p}}\leqslant\infty$. *Тогда справедливо вложение*

$$l^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}\hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}.$$

б) *Пусть* $\mathbf{0}<\vec{\mathbf{p}_1}\leqslant\vec{\mathbf{p}}\leqslant\infty$ *и* $r=\min\{j:p^1_{ij}<p_{ij},i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m\}$. *Тогда при* $r\geqslant 2$ *выполняется вложение*

$$L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega)\hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega),$$

а при $r=1$ *и meas* $(\Omega_i)=|\Omega_i|<\infty$ $(i=1,\ldots,n)$ *выполняется вложение*

$$L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)\hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega).$$

Доказательство. а) Пусть $\vec{\mathbf{p}_1}<\vec{\mathbf{p}}$. Положим сначала, что $p^1_{ij}=p_{ij}$ для всех $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m-1$, а $p^1_{im}<p_{im}$ для всех $i=1,\ldots,n$,. Тогда справедливость вложения

$$l^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}\hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$$

вытекает из неравенства $\left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_k |a_k|^{p_1}\right)^{1/p_1}$ при $0 < p_1 < p \leqslant \infty$.

Если же $p^1_{ik} = p_{ik}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, j-1$ и $p^1_{ij} < p_{ij}$ для некоторого $j = 1, \ldots, m-1$, то согласно предыдущему достаточно доказать вложение $l^*_{\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_{j-1}\mathbf{p}^1_j\infty} \hookrightarrow l^*_{\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_{j-1}\mathbf{p}_j\mathbf{1}}$.

Используя эквивалентную нормировку пространства, имеем

$$\|a\|_{l^*_{\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_{j-1}\mathbf{p}_j\mathbf{1}}} = \sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{1/p_{1j}-1} \ldots k_n^{1/p_{nj}-1} \eta^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n}(a) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{k_1\geqslant 1\\ k_n\geqslant 1}} k_1^{1/p^1_{1j}} \ldots k_n^{1/p^1_{nj}} \eta^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n}(a) \sum_{k_n=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1^{1/p_{1j}-1/p^1_{1j}-1} \ldots k_n^{1/p^1_{nj}-1/p_{nj}-1} =$$

$$= C(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)\|a\|_{l^*_{\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_{j-1}\mathbf{p}^1_j\infty}}.$$

В случае, если $\vec{\mathbf{p}_1} \leqslant \vec{\mathbf{p}}$, то вложение доказывается по той же схеме по тем параметрам, для которых $p^1_{ij} < p_{ij}$.

б) Пусть $\vec{\mathbf{p}_1} < \vec{\mathbf{p}}$, тогда вложение $L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$ при $r \geqslant 2$ выполняется на основании пункта а), так как

$$\|f\|_{L_{\vec{p}_1\vec{p}_2\cdots\vec{p}_m}(\Omega)} = \|\xi(f_\Omega)\|_{l_{\vec{p}_2\cdots\vec{p}_m}}.$$

Докажем вложение $L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}_1}(\Omega)$ при $r = 1$ и $|\Omega_i| < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. На основании первой части достаточно доказать вложение $L^*_{\mathbf{p}\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{1}}(\Omega)$.

Используя эквивалентность норм пространств в данном случае нормам анизотропных пространств Лоренца, имеем

$$\|f\|_{L^*_{\mathbf{p}_1\mathbf{1}}(\Omega)} = \int_0^{|\Omega_n|} \ldots \int_0^{|\Omega_1|} t_1^{1/p^1_1} \ldots t_n^{1/p^1_n} f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1, \ldots, t_n) \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{t_1>0\\ t_n>0}} t_1^{1/p_1} \ldots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1, \ldots, t_n) \int_0^{|\Omega_n|} \ldots \int_0^{|\Omega_1|} t_1^{1/p^1_1-1/p_1-1} \ldots t_n^{1/p^1_n-1/p_n-1} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= C(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1; \Omega)\|f\|_{L^*_{\mathbf{p}\infty}(\Omega)}.$$

В случае же $\vec{\mathbf{p}_1} \leqslant \vec{\mathbf{p}}$ применяются те же рассуждения, что и в пункте а).

Лемма 2. а) *Для последовательностей*

$$\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{n}}} = \{a_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1\in\mathbb{N}^{m_1},\ldots,k_n\in\mathbb{N}^{m_n}} \text{ и } \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{n}}} = \{b_{k_1,\ldots,k_n}\}_{k_1\in\mathbb{N}^{m_1},\ldots,k_n\in\mathbb{N}^{m_n}}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{m}}} |a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}| \leqslant \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^{\mathbf{n}}} a^*_{\mathbf{k}} b^*_{\mathbf{k}}.$$

б) *Для измеримых в* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_n}$ *функций* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $g(\mathbf{x}) = g(x_1, \ldots, x_n)$ *выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n_+} f^*(\mathbf{t}) g^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Доказательство. а) Для произвольных номеров $m_1, \dots, m_n$ последовательным применением неравенства $\sum_k |a_k b_k| \leqslant \sum_k a_k^* b_k^*$ [14] и заменой порядков суммирования получаем

$$\sum_{k_n=1}^{m_n} \dots \sum_{k_1=1}^{m_1} |a_{k_1,\dots,k_n} b_{k_1,\dots,k_n}| \leqslant \sum_{k_n=1}^{m_n} \dots \sum_{k_1=1}^{m_1} a^{*_1}_{k_1,\dots,k_n} b^{*_1}_{k_1,\dots,k_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n=1}^{m_n} \dots \sum_{k_1=1}^{m_1} a^{*_1,\dots,*_{n-1}}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} b^{*_1,\dots,*_{n-1}}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} = \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} a^{*_1,\dots,*_{n-1}}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} b^{*_1,\dots,*_{n-1}}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} a^{*_1,\dots,*_{n-1},*_n}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} b^{*_1,\dots,*_{n-1},*_n}_{k_1,\dots,k_{n-1},k_n} = \sum_{k_n=1}^{m_n} \dots \sum_{k_1=1}^{m_1} a^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} b^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \sum_{k_1=1}^{\infty} a^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} b^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} = \sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} a^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} b^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n}.$$

Переходя к пределу при $m_1 \to \infty, \dots, m_n \to \infty$ получаем требуемое неравенство.

б) Доказательство для простых функций вытекает из пункта а). В общем случае применяем предельный переход от последовательностей простых функций, приближающих функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$.

Теорема 2. *.[Неравенство Гельдера] Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{1}/\vec{\mathbf{p}} + \mathbf{1}/\vec{\mathbf{p}'} = \mathbf{1}$. *Тогда*

а) *для* $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{m}}} \in l_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и* $b = \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{m}}} \in l_{\vec{\mathbf{p}'}}$ *последовательность* $ab = \{a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}\}$ *суммируема и выполняется неравенство*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}} |a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}| \leqslant \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}'}}},$$

б) *для* $f(\mathbf{x}) \in L_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и* $g(\mathbf{x}) \in L_{\vec{\mathbf{p}'}}$ *функция* $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *интегрируема в* $\mathbb{R}^m$ *и выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}'}}}.$$

Доказательство. а) Согласно лемме 2 а) и неравенству Гельдера для $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ получаем

$$\sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} |a_{k_1,\dots,k_n} b_{k_1,\dots,k_n}| \leqslant \sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} a^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} b^{*_1,\dots,*_n}_{k_1,\dots,k_n} =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \sum_{l_n = 2^{k_n - 1}}^{2^{k_n} - 1} \dots \sum_{l_1 = 2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1} - 1} a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} b^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \left(\sum_{l_n = 2^{k_n - 1}}^{2^{k_n} - 1} \dots \left(\sum_{l_1 = 2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1} - 1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \dots \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \times$$

$$\times \left(\sum_{l_n = 2^{k_n - 1}}^{2^{k_n} - 1} \left(\dots \sum_{l_1 = 2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1} - 1} \left(b^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p'_{11}} \right)^{\frac{p'_{21}}{p'_{11}}} \dots \right)^{\frac{1}{p'_{n1}}} =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{N}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \xi_{k_1,\dots,k_n}(a) \xi_{k_1,\dots,k_n}(b) \leqslant \dots \leqslant \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}'}}}.$$

б) Используя лемму 2 б), неравенство Гельдера для векторных $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ и далее неравенство, доказанное в пункте а), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^{m_n}} \dots \int_{\mathbb{R}^{m_n}} |f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \dots \int_{\mathbb{R}_+} f^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n) g^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \dots \int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} f^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n) g^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(\int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \dots \left(\int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} \left(f^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n)\right)^{p_{11}} dt_1 \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \dots dt_n \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \times$$

$$\times \left(\int_{2^{k_n - 1}}^{2^{k_n}} \dots \left(\int_{2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1}} \left(g^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n)\right)^{p'_{11}} dt_1 \right)^{\frac{p'_{21}}{p'_{11}}} \dots dt_n \right)^{\frac{1}{p'_{n1}}} =$$

$$= \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \xi_{k_1, \dots, k_n}(f) \xi_{k_1, \dots, k_n}(g) \leqslant \dots \leqslant \|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}'}}.$$

Лемма 3. а) *Для последовательностей* $\{a_{k_1, \dots, k_n}\}$ *и* $\{b_{k_1, \dots, k_n}\}$ *справедливо неравенство*

$$(a+b)^{*_1, \dots, *_n}_{l_1, \dots, l_n} \leqslant a^{*_1, \dots, *_n}_{[l_1/2], \dots, [l_n/2]} + b^{*_1, \dots, *_n}_{[l_1/2], \dots, [l_n/2]}.$$

б) *Для функций* $f(x_1, \dots, x_n)$ $g(x_1, \dots, x_n)$ *справедливо неравенство*

$$(f+g)^{*_1, \dots, *_n}(t_1, \dots, t_n) \leqslant f^{*_1, \dots, *_n}(t_1/2, \dots, t_n/2) + g^{*_1, \dots, *_n}(t_1/2, \dots, t_n/2).$$

Доказательство получается последовательным применением неравенств

$$(a+b)^*_l \leqslant a^*_{[l/2]} + b^*_{[l/2]}, \qquad (f+g)^*(t) \leqslant f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

по каждому индексу и переменной.

Теорема 3 (Неравенство Минковского). *Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \vec{\mathbf{p}} \leqslant \infty$. *Тогда*

а) *если последовательности* $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}}$ *и* $b = \{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}}$ *принадлежат* $l_{\vec{\mathbf{p}}}$, *то последовательность* $a + b = \{a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}\}$ *также принадлежит* $l_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и выполняется неравенство*

$$\|a+b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \leqslant C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \right),$$

б) *если функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *принадлежат* $L_{\vec{\mathbf{p}}}$, *то функция* $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *также принадлежит* $L_{\vec{\mathbf{p}}}$ *и выполняется неравенство*

$$\|f+g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \leqslant C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|f\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|g\|_{L_{\vec{\mathbf{p}}}} \right).$$

Доказательство. а) Согласно лемме 3 а) и неравенству Минковского для пространств $l_{\mathbf{p}}$ при $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ [13] имеем

$$\xi_{k_1, \dots, k_n}(a+b) = \left(\sum_{l_n = 2^{k_n - 1}}^{2^{k_n} - 1} \left(\dots \sum_{l_1 = 2^{k_1 - 1}}^{2^{k_1} - 1} \left((a+b)^{*_1, \dots, *_n}_{l_1, \dots, l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{\frac{p_{21}}{p_{11}}} \dots \right)^{\frac{1}{p_{n1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l_n=2^{k_n-1}}^{2^{k_n}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{[l_1/2],\dots,[l_n/2]} + b^{*_1,\dots,*_n}_{[l_1/2],\dots,[l_n/2]} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{2^{1/p_1}} \left(\left(\sum_{l_n=2^{k_n-2}}^{2^{k_n-1}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-2}}^{2^{k_1-1}-1} \left(a^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{l_n=2^{k_n-2}}^{2^{k_n-1}-1} \left(\dots \sum_{l_1=2^{k_1-2}}^{2^{k_1-1}-1} \left(b^{*_1,\dots,*_n}_{l_1,\dots,l_n} \right)^{p_{11}} \right)^{p_{21}/p_{11}} \dots \right)^{1/p_{n1}} \right) =$$

$$= \mathbf{2^{1/p_1}} \left(\xi_{k_1-1,\dots,k_n-1}(a) + \xi_{k_1-1,\dots,k_n-1}(b) \right).$$

Аналогично получаем оценки и для $\eta_{k_1,\dots,k_n}(a+b)$.

В результате получим

$$\|a+b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} = \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(a+b))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_n m} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{2^{1/p_1}} \dots \mathbf{2^{1/p_{m-1}}} \left(\left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(a))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_{nm}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k_n=1}^{\infty} \dots \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} (\eta_{k_1,\dots,k_n}(b))^{p_{1m}} \right)^{p_{2m}/p_{1m}} \dots \right)^{1/p_{nm}} \right) = C_{\vec{\mathbf{p}}} \left(\|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} + \|b\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}} \right).$$

б) Доказывается аналогично с использованием леммы 3 б) и неравенства Минковского для пространств $L_{\mathbf{p}}$ при $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

Метод многопараметрической интерполяции для анизотропных пространств.

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 - значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \|\|f(x)\|_{A_1}\|_{A_2}$. Пространство $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ определяется индуктивно и называется *анизотропным пространством размерности* n.

Пусть $\mathbf{A_0} = (A_1^0, \dots, A_n^0)$ и $\mathbf{A_1} = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ – два анизотропных пространства, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$. Для произвольного $\varepsilon \in E$ определим пространство $\mathbf{A}_\varepsilon = (A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_1})$ с нормой

$$\|a\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \| \dots \|a\|_{A_1^{\varepsilon_1}} \dots \|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пару анизотропных пространств $\mathbf{A_0} = (A_1^0, \dots, A_n^0)$ и $\mathbf{A_1} = (A_1^1, \dots, A_n^1)$ назовем совместимой, если найдется линейное хаусдорфово пространство, содержащее в качестве подмножеств пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Пусть $* = (j_1, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка последовательности $(1, \dots, n)$, вектору $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ сопоставим $\varepsilon^* = (\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n}) \in E$. Определим K^* - функционал

$$K^*(\mathbf{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}) = \inf \left\{ \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} : a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon \right\},$$

где $\mathbf{t}^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1}\dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1,\dots,\theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \vec{\mathbf{q}} \leqslant \infty$. Через $\mathbf{A}^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = (\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon\in E}\mathbf{A}_\varepsilon$, для элементов которых верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \|\mathbf{t}^{-\theta}K^*(\mathbf{t},a)\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} < \infty,$$

здесь $L_{\vec{\mathbf{q}}}(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})$ определяется как пространство $L_{\vec{\mathbf{q}}}$ с выражением

$$\xi_{k_1,\dots,k_n}(f) = \left(\int_{2^{k_n-1}}^{2^{k_n}}\dots\left(\int_{2^{k_1-1}}^{2^{k_1}}(f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n))^{p_{11}}\,\frac{dt_1}{t_1}\right)^{p_{21}/p_{11}}\dots\frac{dt_n}{t_n}\right)^{1/p_{n1}}.$$

Лемма 4. *Пусть $(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})$ – совместимая пара анизотропных пространств,*

$$E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1,\dots,n\}.$$

а) *Если $\varepsilon_0,\varepsilon_1 \in E$ такие, что $\varepsilon_0+\varepsilon_1 = 1$, то $(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = (\mathbf{A}_{\varepsilon_0},\mathbf{A}_{\varepsilon_1})^*_{\eta\vec{\mathbf{q}}}$, где $\eta = (\mathbf{1}-\theta)\varepsilon_0 + \theta\varepsilon_1$.*

б) *Если $\vec{\mathbf{q_1}} < \vec{\mathbf{q}}$, то $(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q_1}}} \hookrightarrow (\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$.*

в) *Пусть $* = (j_1,\dots,j_n)$, $*_1 = (r_1,\dots,r_n)$ – некоторые перестановки последовательности $(1,\dots,n)$, тогда выражение $*\circ*_1 = (r_{j_1},\dots,r_{j_n})$ определяет перестановку последовательности $(r_1,\dots,r_n)$, соответствующую вектору $* = (j_1,\dots,j_n)$. Если T – линейный оператор такой, что $T : \mathbf{A}_{\varepsilon^*} \to \mathbf{B}_\varepsilon$, с нормой M_ε для любого $\varepsilon \in E$, то*

$$T : \mathbf{A}^{*\circ*_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \to \mathbf{B}^{*_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}, \mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}, \mathbf{0} < \vec{\mathbf{q}} \leqslant \infty$$

с нормой $\|T\| \leqslant \max_{\varepsilon\in E} M_\varepsilon$.

Доказательство. а) Не уменьшая общности, можно считать, что $* = (1,\dots,n)$. Пусть $a \in (\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}$, тогда

$$\|a\|_{(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\|\mathbf{t}^{-\theta}\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon\in E}\mathbf{t}^\varepsilon\|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} =$$

$$= \left\|\mathbf{t}^{(\mathbf{1}-\theta)\varepsilon_0-\theta\varepsilon_1}\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon\in E}\left(\mathbf{t}^{-(1-\varepsilon)\varepsilon_0+\varepsilon\varepsilon_1}\|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\right)\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})}.$$

Сделаем замену $\mathbf{t}^{\varepsilon_0} \to \mathbf{t}^{-\varepsilon_0}$, то есть если $\varepsilon^0_j = 1$, то $t_j \to 1/t_j$ и если $\varepsilon^0_j = 0$ – замену не делаем. Тогда учитывая инвариантность выражения $\displaystyle\int f(t)\frac{dt}{t}$ относительно данной замены, получим

$$\|a\|_{(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\|\mathbf{t}^{(\mathbf{1}-\theta)\varepsilon_0-\theta\varepsilon_1}\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon\in E}\left(\mathbf{t}^{-(1-\varepsilon)\varepsilon_0+\varepsilon\varepsilon_1}\|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\right)\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} =$$

$$= \left\|\mathbf{t}^{-\eta}\inf_{a=\sum_{\varepsilon\in E}a_\varepsilon}\sum_{\varepsilon'\in E}\mathbf{t}^{\varepsilon'}\|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}}\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = \|a\|_{(\mathbf{A}_{\varepsilon_0},\mathbf{A}_{\varepsilon_1})^*_{\eta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

б) Доказательство следует из теоремы 1.

в) Пусть $*_2 = * \circ *_1$, тогда

$$\|Tb\|_{(\mathbf{B_0},\mathbf{B_1})^{*_1}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \left\|\mathbf{t}^{\theta} \inf_{Ta=\sum_{\varepsilon\in E} b_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon}\|b_{\varepsilon^{*_1}}\|_{\mathbf{B}_{\varepsilon^{*_1}}}\right)\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\mathbf{t}^{\theta} \inf_{Ta=\sum_{\varepsilon\in E} b_\varepsilon} \sum_{\varepsilon\in E} \left(\mathbf{t}^{\varepsilon}M_\varepsilon\|a_{\varepsilon^{*_2}}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^{*_2}}}\right)\right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant \max_{\varepsilon\in E} M_\varepsilon \|a\|_{(\mathbf{A_0},\mathbf{A_1})^{*_2}_{\theta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \vec{\mathbf{p_0}} = (\mathbf{p_1^0},\ldots,\mathbf{p_m^0}), \vec{\mathbf{p_1}} = (\mathbf{p_1^1},\ldots,\mathbf{p_m^1}) \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{p_1^0} \neq \mathbf{p_1^1}$,

$$\mathbf{0} < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) < \mathbf{1}, 0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1},\ldots,\mathbf{q_s}) \leqslant \infty.$$

Тогда

а) $(l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$,

б) $(L^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}(\Omega), L^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}(\Omega))^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$,

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1},\mathbf{q_1},\ldots,\mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

Доказательство. а) Согласно теореме 1 а) достаточно показать вложение $(l^*_{\mathbf{p_1^0}\infty}, l^*_{\mathbf{p_1^1}\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_n)$, где $v_i = t^{\gamma_i}$, $\gamma_i = \frac{p_i^0 p_i^1}{p_i^1 - p_i^0}$, $0 < t_i < \infty$. Для последовательности $a \in \sum_{\varepsilon\in E} l^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}$ рассмотрим представление $a = \sum_{\varepsilon\in E} a(\varepsilon)$, $a(\varepsilon) \in l^*_{\mathbf{p}_\varepsilon\infty}$. Тогда получим

$$\sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p_1^0}\ldots k_{j_n}^{1/p_n^0} a^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n} \leqslant \sum_{\varepsilon\in E} \sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p_1^0}\ldots k_{j_n}^{1/p_n^0} a^{*_1,\ldots,*_n}_{[k_1/2^n],\ldots,[k_n/2^n]}(\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varepsilon\in E} t_1^{\varepsilon_1}\ldots t_n^{\varepsilon_n} \sup_{\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_1^{1/p_1^0}\ldots k_n^{1/p_n^0} a^{*_1,\ldots,*_n}_{[k_1/2^n],\ldots,[k_n/2^n]}(\varepsilon).$$

В последнем соотношении использовалось $k_{j_i}^{1/p_i^0 - 1/p_i^{\varepsilon_i}} \leqslant t_i^{\varepsilon_i}$ при $k_{j_i} \leqslant v_i = t_i^{\gamma_i}$, $i = 1,\ldots,n$. Из произвольности представления $a = \sum_{\varepsilon\in E} a(\varepsilon)$ имеем

$$\sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} k_{j_1}^{1/p_1^0}\ldots k_{j_n}^{1/p_n^0} a^{*_1,\ldots,*_n}_{k_1,\ldots,k_n} \leqslant C_1 K^*(\mathbf{t}/2^n, a; l^*_{\mathbf{p_1^0}\infty}, l^*_{\mathbf{p_1^1}\infty}).$$

Тогда

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \left\|\mathbf{k}^{1/\mathbf{p_1}} a^*_{\mathbf{k}}\right\|_{l^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{k})} \leqslant C_2 \left\|\mathbf{k}^{-\theta(1/\mathbf{p_1^0} - 1/\mathbf{p_1^1})} \sup_{\mathbf{v}\geqslant\mathbf{k}>\mathbf{0}} \mathbf{k}^{1/\mathbf{p_1^0}} a^*_{\mathbf{k}}\right\|_{l^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{k})} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \left\|\mathbf{t}^{-\theta} K^*(\mathbf{t}/2^n, a; l^*_{\mathbf{p_1^0}\infty}, l^*_{\mathbf{p_1^1}\infty})\right\|_{L^*_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{t})} = C_3 \|a\|_{(l^*_{\mathbf{p_1^0}\infty}, l^*_{\mathbf{p_1^1}\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}}.$$

Здесь учитывается инвариантность выражения $\displaystyle\int f(t)\frac{dt}{t}$ относительно замен $t^\alpha \to t$ и $at \to t$, где α и a – постоянные.

Пункт б) доказывается анологично.

Теорема 5. *Пусть* $0 < \vec{\mathbf{p_0}} = (\mathbf{p_1},\ldots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^0},\ldots,\mathbf{p_m^0}), \vec{\mathbf{p_1}} = (\mathbf{p_1},\ldots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^1},\ldots,\mathbf{p_m^1}) \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{p_r^0} \neq \mathbf{p_r^1}$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) < \mathbf{1}$, $0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1},\ldots,\mathbf{q_s}) \leqslant \infty$. *Тогда*

а) $(l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$,

б) $(L^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}(\Omega), L^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}(\Omega))^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow L^*_{\vec{\mathbf{p}}}(\Omega)$,

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1},\ldots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r},\mathbf{q_1},\ldots,\mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_r} = (1-\theta)/\mathbf{p_r^0} + \theta/\mathbf{p_r^1}$.

Доказательство. а) Согласно теореме 1 а) достаточно показать

$$(l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l^*_{\vec{\mathbf{p}}}.$$

Из определения пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}$ следует, что последовательности функционалов $\{\xi^i_{\mathbf{k}}(a)\}$, $1 \leqslant i < r$, входящих в определение норм пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p_0}}}, l^*_{\vec{\mathbf{p_1}}}$, совпадают, так как первые $r-1$ координаты $\vec{\mathbf{p_0}}$ и $\vec{\mathbf{p_1}}$ равны. Определим отображение T следующим образом:

$$T(a) = \{\xi^{r-1}_{\mathbf{k}}(a)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}.$$

Данное отображение квазилинейно и для $j = 0, 1$ справедливо равенство

$$\|a\|l^*_{\mathbf{p_1}\cdots\mathbf{p_{r-1}}\mathbf{p_r^j}\infty} = \|Ta\|_{l^*_{\mathbf{p_r^j}\infty}}.$$

Тогда согласно леммы 4 в), теоремы 4 а) и определения пространств $l^*_{\vec{\mathbf{p}}}$ имеем

$$\|a\|_{l^*_{\vec{\mathbf{p}}}} = \|Ta\|_{l^*_{\mathbf{p_r},\mathbf{q_1},\dots,\mathbf{q_s}}} \leqslant \|Ta\|_{(l^*_{\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} \leqslant \|a\|_{(l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^0},\infty}, l^*_{\mathbf{p_1},\dots,\mathbf{p_{r-1}},\mathbf{p_r^1},\infty})^*_{\theta\vec{\mathbf{q}}}},$$

что и доказывает вложение.

Пункт б) доказывается аналогично.

Пусть $0 < r, v < \infty$. Рассмотрим преобразования типа Харди и Белмана для последовательностей

$$h_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{1/r}} \left(\sum_{l=1}^{k} \left(a^*_l l^{1/r}\right)^v \frac{1}{l} \right)^{1/v} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$b_{rv}(a) = \left\{ \frac{1}{k^{1/r}} \left(\sum_{l=k+1}^{\infty} \left(a^*_l (l-k)^{1/r}\right)^v \frac{1}{l-k} \right)^{1/v} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

и для функций

$$H_{rv}\left(f(t)\right) = \frac{1}{t^{1/r}} \left(\int_0^t \left(f^*(s) s^{1/r}\right)^v \frac{ds}{s} \right)^{1/v},$$

$$b_{rv}\left(f(t)\right) = \frac{1}{t^{1/r}} \left(\int_t^\infty \left(f^*(s)(s-t)^{1/r}\right)^v \frac{ds}{s-t} \right)^{1/v}.$$

Лемма 5 ([12])**.** *Пусть* $0 < v \leqslant q \leqslant \infty$.

а) *Если* $0 < p < r \leqslant \infty$, *то преобразование типа Белмана ограничено в* l_{pq}, *т.е.*

$$\|b_{rv}(a)\|_{l_{pq}} \leqslant C\|a\|_{l_{pq}}.$$

б) *Если* $1 \leqslant r < p$, *то преобразование типа Харди ограничено в* l_{pq}, *т.е.*

$$\|h_{rv}(a)\|_{l_{pq}} \leqslant C\|a\|_{l_{pq}}.$$

в) *Если* $0 < p < r \leqslant \infty$, *то преобразование типа Белмана ограничено в* $L_{pq}(\mathbb{R})$, *т.е.*

$$\|B_{rv}(f)\|_{L_{pq}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{R})}.$$

г) *Если* $1 \leqslant r < p$, *то преобразование типа Харди ограничено в* $L_{pq}(\mathbb{R})$, *т.е.*

$$\|H_{rv}(f)\|_{L_{pq}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_{pq}(\mathbb{R})}.$$

Лемма 6 ([12]). *Пусть* $\mathbf{0} < \mathbf{p_0} = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < \mathbf{p_1} = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \infty$, $0 < \sigma \leqslant \infty$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ *или* $\varepsilon_i = 1, \ \ i = 1, \ldots, n\}$, $\mathbf{A}_\varepsilon = (l_{p_1^{\varepsilon_1}\sigma}, \ldots, l_{p_n^{\varepsilon_n}\sigma})$. *Если* $a \in \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{A}_\varepsilon$, *то для любого* $w = (w_1, \ldots, w_n) > 0$ *найдется такое представление последовательности*

$$a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \ \ a_\varepsilon \in \mathbf{A}_\varepsilon,$$

что

$$\|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = w^{1/p_\varepsilon}(T_\varepsilon a)(w),$$

где $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1} \ldots T_{\varepsilon_n}$ *- композиция операций, удовлетворяющих условиям:*

– $T_0 = h_{p_i^0\sigma}$ – *преобразование типа Харди,*

– $T_1 = b_{p_i^0\sigma}$ – *преобразование типа Белмана.*

Теорема 6. *Пусть* $\mathbf{0} < \mathbf{p_0} = (p_1^0, \ldots, p_n^0) \neq \mathbf{p_1} = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \infty$, $0 < \sigma \leqslant 1$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty$, $* = (j_1, \ldots, j_n)$ – *некоторая перестановка последовательности. Тогда*

а) *если* $\mathbf{A_0} = (l_{p_{j_1}^0\sigma}, \ldots, l_{p_{j_n}^0\sigma})$, $\mathbf{A_1} = (l_{p_{j_1}^1\sigma}, \ldots, l_{p_{j_n}^1\sigma})$, *то*

$$l_{\vec{\mathbf{p}}}^* \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta\vec{\mathbf{q}}}^*;$$

б) *если* $\mathbf{A_0} = (L_{p_{j_1}^0\sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \ldots, L_{p_{j_n}^0\sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}}))$, $\mathbf{A_1} = (L_{p_{j_1}^1\sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_1}}), \ldots, L_{p_{j_n}^1\sigma}(\mathbb{R}^{m_{j_n}})))$, *то*

$$L_{\vec{\mathbf{p}}}^* \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta\vec{\mathbf{q}}}^*.$$

Здесь $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

Доказательство. Используя утверждение а) из леммы 4, можем считать $\mathbf{p_0} < \mathbf{p_1}$, а так как пространства $\mathbf{A_i}$, $i = 0, 1$, расширяются при возрастании параметра σ, то также можно считать, что $\sigma < \min_{j=1,\ldots,n} q_j$.

Пусть $0 < t < \infty$, $v_{j_i} = t_i^{\gamma_i}$, $\gamma_i = p_i^0 p_i^1/(p_i^1 - p_i^0)$. Из леммы 6 следует, что для любой последовательности $a \in (A_0, A_1)_{\theta\vec{\mathbf{q}}}^*$ имеет место представление

$$a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, \ \ \|a_\varepsilon\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} = \mathbf{v}^{1/\mathbf{p}_\varepsilon}(T_\varepsilon a)(v),$$

где $T_\varepsilon = T_{\varepsilon_1} \ldots T_{\varepsilon_n}$ - композиция операций, удовлетворяющих условиям:

– $T_0 = h_{p_i^0\sigma}$ – преобразование типа Харди,

– $T_1 = b_{p_i^0\sigma}$ – преобразование типа Белмана.

Тогда

$$\|a\|_{(L_{\mathbf{p_0}\sigma}, L_{\mathbf{p_1}\sigma})_{\theta\vec{\mathbf{q}}}} = \|\mathbf{t}^{-\theta} K^*(\mathbf{t}, a; \mathbf{A_0}, \mathbf{A_1})\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant \sum_{\varepsilon \in E} \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon - \theta} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = \sum_{\varepsilon \in E} I_\varepsilon.$$

Оценим каждое слагаемое:

$$I_\varepsilon = \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon-\theta} \|a_{\varepsilon^*}\|_{\mathbf{A}_{\varepsilon^*}} \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = \left\| \mathbf{t}^{\varepsilon-\theta} \mathbf{v}^{1/p_\varepsilon} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} = C \left\| \mathbf{t}^{(\varepsilon-\theta)(\mathbf{1/p_0} - \mathbf{1/p_1})} \mathbf{t}^{1/p_\varepsilon} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})}.$$

Так как для любого $\varepsilon \in E$ верно

$$(\varepsilon - \theta)(1/\mathbf{p_0} - 1/\mathbf{p_1}) + 1/\mathbf{p}_\varepsilon = (1-\theta)/\mathbf{p_0} + \theta/\mathbf{p_1} = 1/\mathbf{p},$$

то

$$I_\varepsilon = C \left\| \mathbf{t}^{\mathbf{1/p}} T_{\varepsilon^*}(a) \right\|_{L_{\vec{\mathbf{q}}}(\frac{1}{\mathbf{t}})} \leqslant C_1 \|a\|_{l_{\vec{\mathbf{p}}}^*},$$

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ и $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

В последнем соотношении использовалось неравенство Минковского и утверждение леммы 5.

Доказательство пункта б) проводится аналогично с использованием аналога леммы 6 для пространств функций.

Следствие 1. *Пусть* $l_{\mathbf{p_0}},\ l_{\mathbf{p_1}},\ L_{\mathbf{p_0}},\ L_{\mathbf{p_1}}$ *– пространства Лебега (со смешанной метрикой),* $\mathbf{p_0} \neq \mathbf{p_1}$ *и* $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < \mathbf{1}, 0 < \vec{\mathbf{q}} = (\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s}) \leqslant \infty$. *Тогда*

$$(l_{\mathbf{p_0}},\ l_{\mathbf{p_1}})_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = l_{\vec{\mathbf{p}}}, \quad (L_{\mathbf{p_0}},\ L_{\mathbf{p_1}})_{\theta\vec{\mathbf{q}}} = L_{\vec{\mathbf{p}}},$$

где $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_s})$ *и* $1/\mathbf{p_1} = (1-\theta)/\mathbf{p_1^0} + \theta/\mathbf{p_1^1}$.

Цитированная литература

1. **Берг Й., Лефстрем Й.** //Интерполяционные пространства. Введение. М., 1980.
2. **Трибель Х.** //Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференцируемые операторы. М., 1988.
3. **Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М.** // Итоги науки и техники, Математический анализ. 1986. Т 24. С. 3 - 163.
4. **Sparr G.** // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. V 99. P. 247 - 316.
5. **Fernandez D. L.** // J. Funct. Anai. 1977. V 25, № 2. P. 128 - 146.
6. **Fernandez D. L.** // Stud. Math. (PRL). 1979. V. 65, № 2. P. 175 - 201.
7. **Fernandez D. L.** // Proc. London Math. Soc. 1988. V. 56. P. 143 - 162.
8. **Cobus f., Peetre J.** // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 63. P. 371 - 400.
9. **Крепкогорский В.М.** // Деп. ВИНИТИ, № 2686-79.
10. **Крепкогорский В.М.** // Деп. ВИНИТИ, № 2963-80.
11. **Крепкогорский В.М.** // Изв. вузов. Матем. 1980. Т. 10. С. 75 - 78.
12. **Нурсултанов Е.Д.** // Известия РАН. Серия матем. 2000. Т. 64, № 1. С. 95 - 122.
13. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** // Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1970.
14. **Харди Г.Х., Литтлвуд Д. Э., Пойа Д.** //Неравенства. М., 1948.

Поступила в редакцию 27.10.2006 г.