Математические заметки

том 73 выпуск 3 март 2003

УДК 517.51

ТЕОРЕМА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ХААРА

Т. У. Аубакиров, Е. Д. Нурсултанов

Доказана интерполяционная теорема для одного класса сетевых пространств. В терминах коэффициентов Фурье–Хаара получен критерий принадлежности функции сетевому пространству $N_p^q(M)$, где $1 < p < \infty$, M – множество всех отрезков из $[0,1]$. Как следствие приведен аналог теоремы Харди и Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара.

Библиография: 7 названий.

Хорошо известна теорема Харди–Литтлвуда [1] для тригонометрических рядов:

Пусть $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$. *Если* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– монотонно невозрастающая последовательность, то для того чтобы* $f \in L_p[0,\pi]$, *необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-2} a_k^p. \tag{1}$$

Имеется [2] аналог этой теоремы для монотонных функций.

Если f *монотонна и* $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$, *то для того чтобы* $f \in L_p[0,\pi]$, *необходима и достаточна сходимость ряда* (1).

Как видно из этих результатов, условия принадлежности пространству L_p для монотонных функций и функций с монотонными коэффициентами одни и те же, т.е. сходимость ряда (1).

Для рядов по системе Хаара имеет место иная ситуация. П. Л. Ульянов в работе [3] доказал, что если коэффициенты Фурье–Хаара $\{c_k\}$ монотонны, то для того чтобы функция f принадлежала пространству $L_p[0,1]$ при $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, т.е. сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

В работе, в частности, доказано следующее утверждение.

Пусть $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– система Хаара,* $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k$. *Если* $f(x)$ *– монотонная функция, то для того чтобы* $f \in L_{pq}$, *необходимо и достаточно чтобы сходился ряд*

$$\biggl(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q} \Bigl(\sup_{2^k \leqslant \nu < 2^{k+1}} |c_\nu|\Bigr)^q\biggr)^{1/q}. \tag{2}$$

Также получены неравенства, являющиеся аналогами неравенств Пэли [1].

Методы исследования опираются на интерполяционные теоремы для некоторого класса сетевых пространств, доказанные в п. 1.

1. Интерполяционные свойства сетевых пространств. Пусть μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, M – некоторое фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем M будем называть "*сетью*". Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M, определим функцию

$$\bar{f}(t,M)=\sup_{\substack{e\in M\\ |e|>t}}\frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)\,d\mu\right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем множествам $e\in M$, мера которых $|e|\overset{\text{def}}{=}\mu e>t$, $t\in(0,\infty)$. В случае $\sup\{|e|\colon e\in M\}=\alpha<\infty$ и $t>\alpha$ положим $\bar{f}(t,M)=0$. Функция $\bar{f}(t,M)$ называется *усреднением функции* f *по сети* M.

Через $N_{pq}(M)$, $0<p,q\leqslant\infty$, обозначим множество функций f, для которых при $q<\infty$

$$\|f\|_{N_{pq}(M)}=\left(\int_0^\infty (t^{1/p}\bar{f}(t,M))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty$$

и при $q=\infty$

$$\|f\|_{N_{p\infty}(M)}=\sup_{t>0}t^{1/p}\bar{f}(t,M)<\infty.$$

Отметим некоторые свойства пространств N_{pq}.

а) Если $M_1\subset M_2$, то $N_{pq}(M_2)\hookrightarrow N_{pq}(M_1)$.

б) При $0<q\leqslant q_1\leqslant\infty$ $N_{pq}(M)\hookrightarrow N_{pq_1}(M)$.

в) Если сеть M такова, что $\sup_{e\in M}|e|=\alpha<\infty$, то при $0<p<p_1\leqslant\infty$, $0<q,q_1\leqslant\infty$ верно $N_{p_1q_1}(M)\hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Пусть (A_0,A_1) – совместимая пара банаховых пространств [4],

$$K(t,a;A_0,A_1)=\inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}),\qquad a\in A_0+A_1,$$

– функционал Петре.

При $0<q<\infty$, $0<\theta<1$

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=\left\{a\in A_0+A_1\colon \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a))^q\,\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$(A_0,A_1)_{\theta,\infty}=\left\{a\in A_0+A_1\colon \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K(t,a)<\infty\right\}.$$

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $0<p_0<p_1<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$.
Если M *– произвольная сеть в* $\mathbb{R}^n$, *то*

$$(N_{p_0q_0}(M),N_{p_1q_1}(M))_{\theta q}\hookrightarrow N_{pq}(M),$$

где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$.

Целью данного пункта является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$, $0<\theta<1$, $1\leqslant p_0<p_1<\infty$, $1\leqslant q_0,q_1,q\leqslant\infty$, $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$. Тогда*

$$(N_{p_0q_0}(M),N_{p_1q_1}(M))_{\theta q}=N_{pq}(M).$$

Лемма 1. *Если семейство M таково, что для любого $\tau>0$ и некоторого $r>0$ имеет место неравенство*

$$\inf_{|\phi|\leqslant\bar f(\tau)}\Bigl(\sup_{s\geqslant\tau}s^{1/r}\overline{(f-\phi)}(s;M)\Bigr)\leqslant c\sup_{\tau\geqslant s>0}s^{1/r}\bar f(s;M), \tag{3}$$

где c – константа, которая не зависит от f и τ, то при $r<p_0<p_1<\infty$, $0<\theta<1$

$$(N_{p_0q_0}(M),N_{p_1q_1}(M))_{\theta q}=N_{pq}(M),$$

где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $1\leqslant q,q_0,q_1\leqslant\infty$.

Доказательство. Покажем, что если выполнено условие леммы, то

$$(N_{r\infty}(M),N_{\infty\infty}(M))_{\theta q}=N_{pq}(M),\qquad 1\leqslant q\leqslant\infty,$$

и тогда по теореме о реитерации для вещественного метода [4] получим утверждение леммы.

Из условия на сеть M имеем

$$\begin{aligned}K(t,f)&\leqslant K(t,f;N_{r\infty},N_{\infty\infty})\\&\leqslant c\inf_{|\phi|\leqslant\bar f(\tau)}\sup_{\tau\geqslant s>0}s^{1/r}\overline{(f-\phi)}(s)+t\bar f(\tau).\end{aligned}$$

Принимая во внимание монотонность $\bar f(s)$, при $\tau=t^r$ получим

$$\begin{aligned}K(t,f)&\leqslant r\sup_{\tau\geqslant s}\int_0^s\bar f(y)y^{1/r-1}\,dy+2r\int_0^{t^r}\bar f(y)y^{1/r-1}\,dy\\&=3r\int_0^{t^r}\bar f(y)y^{1/r-1}\,dy\end{aligned}$$

или

$$\|f\|_{(N_{r\infty},N_{\infty\infty})_{\theta q}}\leqslant 3r\biggl(\int_0^\infty\biggl(t^{-\theta}\int_0^{t^r}\bar f(y)y^{1/r-1}\,dy\biggr)^q\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}.$$

Далее, производя замену во внутреннем интеграле $y\to yt^r$ и применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|f\|_{(N_{r\infty}(M),N_{\infty\infty}(M))_{\theta q}}\leqslant c\int_0^1\biggl(\int_0^\infty(t^{-\theta}\bar f(yt^r))^q\,\frac{dt}{t}\biggr)^{1/q}y^{1/r}\,\frac{dy}{y}.$$

И, наконец, во внутреннем интеграле произведя замену $yt^r\to t$, получим

$$\|f\|_{(N_{r\infty}(M),N_{\infty\infty}(M))_{\theta q}}\leqslant c\biggl(\int_0^1y^{\theta/r-1}\,dy\biggr)\|f\|_{N_{pq}(M)}=c_1\|f\|_{N_{pq}(M)}$$

или

$$N_{pq}(M)\hookrightarrow(N_{r\infty}(M),N_{\infty\infty}(M))_{\theta q},$$

где $1/p=(1-\theta)/r$.

С другой стороны, из теоремы 1 следует обратное вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть M – множество всех отрезков из $\mathbb{R}$. Покажем, что для этой сети при $r=1$ выполняется условие (3) из леммы 1.

Для функции f и фиксированного $\tau>0$ определим функцию $\phi_0(x)$ следующим образом. Разобьем $\mathbb{R}$ на непересекающиеся полуинтервалы $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ меры $|I_k|=\tau$. Пусть

$$\phi_0(x)=\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(y)\,dy \qquad \text{при } x\in I_k.$$

Заметим, что $|\phi_0(x)|\leqslant \bar f(\tau,M)$ и $\int_{I_k}(f(x)-\phi_0(x))\,dx=0$ для любых $k\in\mathbb{Z}$. Тогда для любого отрезка $I\colon |I|\geqslant\tau$ верно

$$\begin{aligned}\left|\int_I(f-\phi_0)(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{k=m}^{m+N}\int_{I_k}(f(x)-\phi_0(x))\,dx+\int_{I\cap I_{m-1}}(f-\phi_0)(x)\,dx\right.\\ &\qquad\left.+\int_{I\cap I_{m+N+1}}(f(x)-\phi_0(x))\,dx\right|\\ &\leqslant \left|\int_{I\cap I_{m-1}}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{I\cap I_{m+N+1}}f(x)\,dx\right|\\ &\qquad+(|I\cap I_{m-1}|+|I\cap I_{m+N+1}|)\bar f(\tau).\end{aligned}$$

Или при $s_1=|I\cap I_{m-1}|\leqslant\tau$, $s_2=|I\cap I_{m+N+1}|\leqslant\tau$

$$\left|\int_I(f-\phi_0)(x)\,dx\right|\leqslant s_1\bar f(s_1,M)+s_2\bar f(s_2,M)+2\tau\bar f(\tau,M);$$

следовательно,

$$\left|\int_I(f-\phi_0)(x)\,dx\right|\leqslant 4\sup_{\tau\geqslant s>0}s\bar f(s,M).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\inf_{|\phi|\leqslant\bar f(\tau)}\sup_{s\geqslant\tau}s\overline{(f-\phi_0)} &\leqslant \sup_{s\geqslant\tau}s\overline{(f-\phi_0)}(s)=\sup_{s\geqslant\tau}s\sup_{|I|\geqslant s}\frac{1}{|I|}\left|\int_I(f-\phi_0)(x)\,dx\right|\\ &\leqslant 4\sup_{\tau\geqslant t>0}t\bar f(t)\sup_{s\geqslant\tau}\sup_{|I|\geqslant s}\frac{s}{|I|}=4\sup_{\tau\geqslant t>0}t\bar f(t).\end{aligned}$$

Таким образом, сеть M удовлетворяет условию леммы 1 и, следовательно, теорема 2 доказана.

2. Теорема Харди–Литтлвуда и неравенства типа Пэли.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $1<p<\infty$, M – *множество всех отрезков в* $\mathbb{R}$. *Тогда для того чтобы* $f\in N_{pq}(M)$ *необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье–Хаара* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имело место условие*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)q}|b_k|^q\right)^{1/q}<\infty,$$

где $b_k=\sup_{2^k\leqslant\nu<2^{k+1}}|c_\nu|$, $k=0,1,2,\dots$, *причем*

$$\|f\|_{N_{pq}(M)}\sim\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)q}|b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k$. Докажем неравенство

$$\|b\|_{l^{\sigma}_{\infty}} \leqslant c\|f\|_{N_{p\infty}(M_0)}, \tag{4}$$

где $\sigma = 1/2 - 1/p$. По определению

$$\begin{aligned}\|b\|_{l^{\sigma}_{\infty}} &= \sup_{k\geqslant 0} 2^{k(1/2-1/p)} \max_{2^k\leqslant\nu<2^{k+1}} |c_\nu| \\ &\leqslant 2 \sup_{k\geqslant 0} 2^{k(1/2-1/p)} \max_{1\leqslant\nu\leqslant 2^k} 2^{k/2}\left|\int_{(\nu-1)/2^k}^{\nu/2^k} f(x)\,dx\right| \\ &\leqslant 2 \sup_{Q\in M} \frac{1}{|Q|^{1/p'}}\left|\int_Q f(x)\,dx\right| = 2\|f\|_{N_{p\infty}(M)}.\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (4) доказано для произвольного $1 < p < \infty$. Пространство с нормой $\|c\| = \|b\|_{l^{\sigma}_{q}}$ является ретракцией пространства $l^{\sigma}_{q}(l_\infty)$ [6]. Поэтому из интерполяционных свойств пространств $l^{\sigma}_{q}(l_\infty)$ и теоремы 2 получим "сильное" неравенство

$$\|b\|_{l_q^{1/2-1/p}} \leqslant c\|f\|_{N_{pq}(M)}$$

для произвольных $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Покажем обратное неравенство, действуя по той же схеме. Пусть Q – произвольный отрезок из сети M. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|^{1/p'}}\left|\int_Q f(x)\,dx\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|^{1/p'}}\left|\int_Q \sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1} c_\nu\chi_\nu(x)\,dx\right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|^{1/p}}\left|\sum_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k} c_\nu\int_Q \chi_\nu(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

Из определений функций $\chi_\nu(x)$ следует, что не более двух слагаемых в сумме

$$\sum_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k} c_\nu\int_Q \chi_\nu(x)\,dx$$

отлично от нуля, а именно, те слагаемые, где носители функций χ_ν содержат концы отрезка. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|^{1/p'}}\left|\int_Q f(x)\,dx\right| &\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|^{1/p'}}\max_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k}|c_\nu|\cdot 2^{k/2}\min\left(|Q|, \frac{1}{2^k}\right) \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} 2^{1/2-1/p'}\max_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k}|c_\nu|.\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора отрезка Q получим

$$\|f\|_{N_{p\infty}(M)} = \sup_{|Q|\in M} \frac{1}{|Q|^{1/p'}} \left| \int_Q f(x)\,dx \right| \leqslant c\|a_k\|_{l_1^{1/2-1/p'}}.$$

Из интерполяционных свойств пространств $l_r^\sigma(l_\infty)$ и теоремы 2 получим

$$\|f\|_{N_{pq}(M)} \leqslant c\|b\|_{l_q{}^{1/2-1/p}} = c\biggl(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{q(1/2-1/p)k} \sup_{2^k\leqslant\nu<2^{k+1}} |c_\nu|^q\biggr)^{1/q}.$$

Теорема доказана.

Функцию f назовем *обобщенно-монотонной* (*невозрастающей*), если для любого $x\in(0,1]$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant \frac{B}{|x|}\left|\int_0^x f(y)\,dy\right|.$$

Теорема 4. *Пусть $1<p<\infty$, f – обобщенно-монотонная. Тогда для того, чтобы $f\in L_{pq}[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье–Хаара $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ имело место неравенство*

$$\biggl(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)q}|b_k|^q\biggr)^{1/q} < \infty.$$

Утверждение данной теоремы следует из теоремы 3, так как для обобщенно-монотонных функций, когда M – множество всех отрезков из $[0,1]$, нормы пространств $N_{pq}(M)$ и $L_{pq}[0,1]$ эквивалентны (имеют место двусторонние неравенства).

А. В. Масловым [7] были получены неравенства типа Пэли для рядов Фурье–Хаара: *пусть монотонная последовательность положительных чисел $\{v_m\}_{m=0}^\infty$ такова,что*

$$\sum_{m=0}^{\infty}(v_m(m+1))^{-1}<\infty.$$

Тогда

1) *для любого $p\in(1,2)$ и всех функций $f\in L_p$ справедливы неравенства*

$$C_1\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(f)|^p(v_m(m+1))^{p/2-1} \leqslant \|f\|_p^p \leqslant C_2\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(f)|^p(m+1)^{p/2-1};$$

2) *для любого $p>2$ и всех функций $f\in L_p$ справедливы неравенства*

$$C_3\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(f)|^p(m+1)^{p/2-1} \leqslant \|f\|_p^p \leqslant C_4\sum_{m=0}^{\infty}|c_m(f)|^p(v_m(m+1))^{p/2-1}.$$

Следующая теорема в некотором смысле дополняет эти результаты.

Теорема 5. *Пусть* $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – *система Хаара,* $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$,

$$\vartheta=\{\vartheta_k\}=\left\{\frac{1}{2^{k/2}}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}c_\nu\right\}_{k=1}^{\infty}, \qquad u=\{u_k\}=\left\{2^{k/2}\max_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k}|c_\nu|\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

а) *Если* $1<p<2$, $p'=p/(p-1)$ *и* $f\in L_p[0,1]$, *то верно неравенство*

$$\|\vartheta\|_{l_{p'q}}\leqslant c\|f\|_{L_{pq}[0,1]}.$$

б) *Если* $p>2$ *и* $u\in l_{p'q}$, *то* $f\in L_{pq}[0,1]$ *и верно неравенство*

$$\|f\|_{L_{pq}[0,1]}\leqslant c\|u\|_{l_{p'q}}.$$

Доказательство. Рассмотрим систему функций

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{2^{k/2}}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}\chi_\nu(x), \qquad k=1,2,\dots.$$

Данная система функций является ортогональной, нормированной и ограниченной в совокупности. Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по этой системе имеют вид

$$\int_0^1 f(x)\varphi_k(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\frac{1}{2^{k/2}}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}\chi_\nu(x)\,dx=\frac{1}{2^{k/2}}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}c_\nu=\vartheta_k.$$

Из неравенства Пэли при $1<p<2$ получим

$$\|\vartheta\|_{l_{p'q}}\leqslant c\|f\|_{L_{pq[0,1]}}.$$

Докажем пункт б) теоремы 5. При $p=\infty$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_\infty}=\sup|f(x)|\leqslant\sup_x\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}c_\nu\chi_\nu(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{k/2}\max_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k}|c_\nu|=\|u\|_{l_1}.$$

Для $p=2$ из равенства Парсеваля получаем

$$\|f\|_{L_2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}c_\nu^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{k/2}\max_{2^{k-1}\leqslant\nu<2^k}|c_\nu|\right)^2\right)^{1/2}=\|u\|_{l_2}.$$

Используя интерполяционные свойства соответствующих пространств, получим

$$\|f\|_{L_{pq}}\leqslant c\|u\|_{l_{p'q}}$$

при $2<p<\infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
[2] Boas R. P., Jr. Integrability Theorems and Transforms. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. V. 38. New York: Springer-Verlag, 1966.
[3] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). №3. С. 356–391.
[4] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
[5] Nursultanov E. D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities // East J. Approx. 1998. №2. P. 243–275.
[6] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференцируемые операторы. М.: Мир, 1988.
[7] Маслов А. В. О коэффициентах Фурье по системе Хаара функций из пространств L_p // Матем. сб. 1985. Т. 126 (168). №4. С. 490–514.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Караганда
E-mail: nurs@kargu.krg.nz

Поступило
20.05.2001