О нижней оценке нормы интегрального оператора свёртки

Е. Д. НУРСУЛТАНОВ, К. С. САЙДАХМЕТОВ
Институт прикладной математики
АН Республики Казахстан

УДК 517.5

Ключевые слова: оператор свёртки, гармонический отрезок.

Аннотация

В работе изучается вопрос о нижней оценке нормы оператора свёртки. Доказано, что если $1 < p \leqslant q < +\infty$, $K(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и оператор

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy = K * f$$

ограниченно действует из L_p в L_q, то существует константа $C(p,q,n)$, такая что

$$C \sup_{e \in Q(C)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \int\limits_e K(x)\,dx \leqslant \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Здесь $Q(C)$ — множество всех измеримых по Лебегу множеств конечной меры, удовлетворяющих условию $|e+e| \leqslant C \cdot |e|$, $|e|$ — мера Лебега множества e.

Если $1 < p < q < +\infty$, оператор A ограниченно действует из L_p в L_q и $\mathfrak{Q}$ — множество всех гармонических отрезков, то существует константа $C(p,q,n)$, такая что

$$C \sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int\limits_e K(x)\,dx \right| \leqslant \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Abstract

E. D. Nursultanov, K. S. Saidahmetov, On lower bound of the norm of integral convolution operator, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 8 (2002), no. 1, pp. 141–150.

We study the lower bound problem for the norm of integral convolution operator. We prove that if $1 < p \leqslant q < +\infty$, $K(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ and the operator

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy = K * f$$

is a bounded operator from L_p to L_q, then there exists a constant $C(p,q,n)$ such that

$$C \sup_{e \in Q(C)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \int\limits_e K(x)\,dx \leqslant \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Here $Q(C)$ is the set of all Lebesgue measurable sets of finite measure that satisfy the condition $|e+e| \leqslant C \cdot |e|$, $|e|$ being the Lebesgue measure of the set e.

Фундаментальная и прикладная математика, 2002, том 8, № 1, с. 141–150.

If $1 < p < q < +\infty$, the operator A is a bounded operator from L_p to L_q, and $\mathfrak{Q}$ is the set of all harmonic segments, then there exists a constant $C(p,q,n)$ such that

$$C \sup_{e\in\mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int\limits_e K(x)\,dx \right| \leqslant \|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Рассмотрим интегральный оператор свёртки

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy = K*f, \tag{1}$$

действующий из L_p в L_q, где $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$ — пространства Лебега.

При $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ согласно неравенству Юнга имеем, что $\|A\|_{L_p\to L_q} \leqslant \|K\|_{L_r}$, где $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Но данное достаточное условие невозможно применить для операторов со степенным ядром $K(x) = \frac{1}{|x|^\gamma}$. Согласно неравенству Харди–Литтлвуда оператор $Af = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\gamma}$ является ограниченным тогда и только тогда, когда $\frac{\gamma}{n} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

О'Нейлом [2] было доказано неравенство $\|A\|_{L_p\to L_q} \leqslant C\cdot\|K\|_{r\infty}$ ($1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $L_{r\infty}$ — пространство Марцинкевича), которое даёт более тонкое, чем неравенство Юнга, достаточное условие ограниченности интегральных операторов свёртки и охватывает неравенство Харди–Литтлвуда. Одной из трактовок неравенства О'Нейла является следующая оценка:

$$\|A\|_{L_p\to L_q} \leqslant C(p,q) \sup_{e\in E} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int\limits_e K(x)\,dx \right|, \tag{2}$$

где E — множество всевозможных ограниченных измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^n$, $|e|$ — мера Лебега множества e.

В данной работе изучается вопрос о нижней оценке нормы оператора свёртки. Показано, что если вместо E взять некоторое более узкое семейство, то соотношение (2) обращается.

Верны следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leqslant q < +\infty$, $K(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Если оператор (1) ограниченно действует из L_p в L_q, то существует константа $C(p,q,n)$, такая что*

$$C \sup_{e\in Q(C)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \int\limits_e K(x)\,dx \leqslant \|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Здесь $Q(C)$ — множество всех измеримых по Лебегу множеств конечной меры, удовлетворяющих условию $|e+e| \leqslant C\cdot|e|$.

Замечание. Заметим, что при $p = q$ точные верхние грани в (2) и в последнем соотношении совпадают и получается необходимое и достаточное условие ограниченности оператора (1), действующего из L_p в L_p, что было доказано В. Д. Степановым (см. [3]).

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда запись $x \leqslant y$ будет означать $x_i \leqslant y_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Для пары $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ введём операцию $x \circ y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n)$, сопоставляющую паре вектор, полученный умножением координат с одинаковыми номерами. Также обозначим

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, \ldots, n\},$$
$$\mathbb{Z}^n_+ = \{m \in \mathbb{Z}^n \mid m_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Если $\xi \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}^n$, то $\xi d = d\xi = (\xi d_1, \ldots, \xi d_n)$.

Пусть $d \in \mathbb{R}^n_+$. Через $I_d(z)$ обозначим прямоугольный параллелепипед с центром в точке $z \in \mathbb{R}^n$ и со сторонами, параллельными координатным осям, имеющими длины $d_1, \ldots, d_n$, то есть

$$I_d(z) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x_i - z_i| < \frac{d_i}{2} \right\}.$$

Определение. Пусть $h \in \mathbb{R}^n_+$, $m \in \mathbb{Z}^n_+$, I_d — некоторый параллелепипед. Множество

$$Q_d(x, m, h) = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant m} I_d(x + i \circ h)$$

назовём гармоническим отрезком, порождённым параллелепипедом $I_d(x)$. Множество всех гармонических отрезков обозначим через $\mathfrak{Q}$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < q < +\infty$. Если оператор (1) ограниченно действует из L_p в L_q, то существует константа $C(p, q, n)$, такая что*

$$C \sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p - 1/q}} \left| \int\limits_e K(x)\, dx \right| \leqslant \|A\|_{L_p \to L_q}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть оператор (1) ограниченно действует из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим $f(x) = \chi_{-(e+e)}(x)$ — характеристическую функцию множества $-(e + e)$. Ясно, что $\|f\|_p = |e + e|^{1/p} \leqslant C^{1/p} \cdot |e|^{1/p}$. Тогда

$$\|Af\|_q = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x - y) f(y)\, dy \right)^q dx \right)^{1/q} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\int\limits_{-e} \left(\int\limits_{-(e+e)} K(x - y)\, dy \right)^q dx \right)^{1/q} = \left(\int\limits_{e} \left(\int\limits_{(e+e)-x} K(y)\, dy \right)^q dx \right)^{1/q}.$$

Если $x \in e$, то $e + x \subset e + e$. Отнимая от обеих частей x, получим, что если $x \in e$, то $e \subset e + e - x$. Тогда в силу неотрицательности $K(x)$ из последнего выражения получаем

$$
\|Af\|_q \geqslant \left(\int_e \left(\int_{(e+e)-x} K(y)\,dy \right)^q dx \right)^{1/q} \geqslant
$$

$$
\geqslant \left(\int_e \left(\int_e K(y)\,dy \right)^q dx \right)^{1/q} = |e|^{1/q} \int_e K(y)\,dy.
$$

Но с другой стороны, в силу ограниченности оператора

$$
\|Af\|_q \leqslant \|A\| \cdot \|f\|_p \leqslant C^{1/p} \cdot \|A\| \cdot |e|^{1/p}.
$$

Следовательно,

$$
|e|^{1/q} \int_e K(x)\,dy \leqslant C^{1/p} \cdot \|A\| \cdot |e|^{1/p}.
$$

В силу произвольности e это означает

$$
C^{-1/p} \sup_{e\in Q(C)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \int_e K(x)\,dx \leqslant \|A\|.
$$

В частности, при $p = q$ мы получаем $C_1\|K\|_{L_1} \leqslant \|A\|$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Если $x \in I_{d\varepsilon}(0)$, то для любой точки $\omega \in \mathbb{R}^n$*

$$
I_d(\omega) \subset I_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x).
$$

Доказательство. По определению прямоугольника

$$
x \in I_{d\varepsilon}(0) \iff |x_i| \leqslant \frac{d_i \cdot \varepsilon}{2} \quad \forall i = 1, \dots, n,
$$

$$
z \in I_d(\omega) \iff |z_i - \omega_i| \leqslant \frac{d_i}{2} \quad \forall i = 1, \dots, n.
$$

Тогда для произвольно взятой точки z из прямоугольника $I_d(\omega)$ имеем

$$
z \in I_d(\omega) \implies |z_i - (\omega_i - x_i)| \leqslant |z_i - \omega_i| - |x_i| \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{d_i}{2} + \frac{d_i\varepsilon}{2} = \frac{d_i(1+\varepsilon)}{2} \quad \forall i = 1, \dots, n.
$$

Следовательно, $z \in I_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x)$. Произвольность выбора точки z доказывает лемму.

Лемма 2. *Если $I_d(x) \in I_{d(1+\varepsilon)(y)}$, то существуют прямоугольники I^i, $i = 1, 2, \dots, 2n$, такие что $|I^i \cap I^j| = 0$ при $i \neq j$, $|I^i| \leqslant (1+\varepsilon)^{2n-1}\varepsilon|I_d(x)|$ и $I_{d(1+\varepsilon)}(y) \setminus I_d(x) = \bigcup_{i=1}^{2n} I^i$.*

Доказательство. Пусть

$$
I_d(x) = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],
$$

$$
I_{d(1+\varepsilon)}(y) = [a_1', b_1'] \times \ldots \times [a_n', b_n'].
$$

По условию леммы

$$|b_i' - a_i'| = (1+\varepsilon)d_i = (1+\varepsilon)\cdot|b_i - a_i|.$$

Тогда в качестве искомых параллелепипедов можно взять, например, следующие множества:

$$\begin{gathered}
I^1 = [a_1', a_1] \times [a_2', b_2'] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
I^2 = [b_1, b_1'] \times [a_2', b_2'] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
I^3 = [a_1, b_1] \times [a_2', a_2] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
I^4 = [a_1, b_1] \times [b_2, b_2'] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
\cdots\cdots\cdots\\
I^{2i-1} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \ldots [a_i', a_i] \ldots [a_{i+1}', b_{i+1}'] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
I^{2i} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \ldots [b_i, b_i'] \ldots [a_{i+1}', b_{i+1}'] \times \ldots \times [a_n', b_n'],\\
\cdots\cdots\cdots\\
I^{2n} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [b_n, b_n'].
\end{gathered}$$

По построению ясно, что $I_{d(1+\varepsilon)}(y) \setminus I_d(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{2n} I^i$ и $|I^i \cap I^j| = 0$. Также меру прямоугольного параллелепипеда I^i можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
|I^i| \leqslant \prod_{i\neq j} |b_j' - a_j'|(|b_i' - a_i'| - |b_i - a_i|) \leqslant \prod_{i\neq j}(1+\varepsilon)d_j \cdot ((1+\varepsilon)d_i - d_i) =\\
= \left(\prod_{j=1}^{2n} d_j\right)\cdot(1+\varepsilon)^{2n-1}\varepsilon = (1+\varepsilon)^{2n-1}\varepsilon\cdot|I_d(x)|.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $1 < p < q < \infty$,

$$\sup_{e\in\mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_e K(x)\,dx\right| < +\infty$$

и оператор (1) *ограниченно действует из* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_q(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует константа* C, *не зависящая от* K, *что для нормы оператора справедливо неравенство*

$$C\cdot\sup_{e\in\mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_e K(x)\,dx\right| \leqslant \|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Доказательство. Пусть оператор конечен и

$$J = \sup_{e\in\mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_e K(x)\,dx\right| < \infty.$$

Тогда по определению точной верхней грани существует гармонический отрезок $Q_d(x, m, h)$, такой что

$$\frac{2}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_{Q_d(x,m,h)} K(x)\,dx\right| > J. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon = \left(\frac{1}{16n}\right)\frac{1}{2^{2n}}$. Обозначим $[m\varepsilon] = ([m_1\varepsilon],\ldots,[m_n\varepsilon])$.

Пусть k — число компонент векторов $[m\varepsilon]$, для которых $[m_i\varepsilon] > 0$, т. е.

$$k = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sign}[m_i\varepsilon].$$

Не ограничивая общности, можем считать, что при $i = 1,2,\ldots,k$ $[m_i\varepsilon] \geqslant 1$.

Обозначим через Q линейную сумму гармонических отрезков $Q_d(\omega,m,h)$ и $Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)$, т. е. $Q = Q_d(\omega,m,h) + Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)$.

Покажем, что Q тоже является гармоническим отрезком. По определению

$$\begin{aligned}
Q &= \bigcup_{0\leqslant i\leqslant m} (I_d(\omega + i\circ h) + Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)) = \\
&= \bigcup_{0\leqslant i\leqslant m}\ \bigcup_{0\leqslant j\leqslant [m\varepsilon]} (I_d(\omega + i\circ h) + I_{d\varepsilon}(j\circ h)) = \\
&= \bigcup_{0\leqslant i\leqslant m}\ \bigcup_{0\leqslant j\leqslant [m\varepsilon]} I_{d(1+\varepsilon)}(\omega + (i+j)\circ h) = \\
&= \bigcup_{0\leqslant i\leqslant m+[m\varepsilon]} I_{d(1+\varepsilon)}(\omega + i\circ h) = Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega, m+[m\varepsilon], h).
\end{aligned} \tag{4}$$

Если $x \in I_{d\varepsilon}(j\circ h)$, то $Q_d(\omega,m,h) + x \subset Q$, следовательно,

$$Q_d(\omega,m,h) \subset Q - x = Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, m+[m\varepsilon], h).$$

Теперь покажем расщепление множества в правой части последнего соотношения на гармонические отрезки. Пусть $x \in I_{d\varepsilon}(0) \subset Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, m+[m\varepsilon], h) = \\
&\quad = Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, (m_1, m_2+[m_2\varepsilon],\ldots,[m_n\varepsilon]), h) \cup \\
&\quad \cup Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x + ((m_1+1)h_1, 0,\ldots,0), ([m_1\varepsilon]-1, m_2+[m_2\varepsilon],\ldots,[m_n\varepsilon]), h) = \\
&\quad = Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, m, n) \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k,
\end{aligned}$$

где

$$Q_i = Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x + y_i, l_i, h), \quad i = 1,\ldots,k.$$

Здесь

$$y_i = (0,\ldots,0,(m_i+1)h_i,0,\ldots,0),$$
$$l_i = (m_1,\ldots,m_{i-1},[m_i\varepsilon]-1, m_{i+1}+[m_{i+1}\varepsilon],\ldots,m_n+[m_n\varepsilon]).$$

Ясно, что $|Q_i \cap Q_j| = 0$ и

$$|Q_i| \leqslant \prod_{i=1}^{n} d_i(1+\varepsilon) \cdot \left(\prod_{i=1}^{j-1} m_i\right) \cdot [m_j\varepsilon] \cdot \left(\prod_{i=j+1}^{n} (m_i + [m_i\varepsilon])\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n} d_i(1+\varepsilon) \cdot \left(\prod_{i\neq j} m_i(1+\varepsilon)\right) \cdot m_j\varepsilon \leqslant 2^{n-1}|Q_d(\omega,m,h)| \cdot \varepsilon. \quad (5)$$

Так как $x \in I_{d\varepsilon}(0)$, по лемме 1 $I_d(\omega) \subset I_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x)$, следовательно, $I_d(\omega + i \circ h) \subset I_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x + i \circ h)$. Поэтому по лемме 2 существуют прямоугольники, такие что

$$I_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x) = I_d(\omega) \cup I^1 \cup \ldots \cup I^{2n},$$

$|I^i \cap I^j| = 0$ при $i \neq j$, $i = 1,\ldots,2n$, $j = 1,\ldots,n$, и $|I^i| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}|I_d(\omega)|$ $\forall i = 1,\ldots,n$. Тогда через $\hat{Q}^i$, $i = 1,\ldots,2n$, обозначим гармонические отрезки

$$\hat{Q}^i = \prod_{0\leqslant j\leqslant m} I^i + j \circ h, \quad i = 1,\ldots,2n.$$

$$|\hat{Q}^i| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}|Q_d(\omega,m,h)| \leqslant \varepsilon \cdot 2^{n-1}|Q_d(\omega,m,h)|. \quad (6)$$

$$Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, m, n) = Q_d(\omega,m,h) \cup \hat{Q}^1 \cup \ldots \cup \hat{Q}^{2n}.$$

Отсюда имеем, что

$$Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - x, m + [m\varepsilon], h) = Q_d(\omega,m,h) \cup \hat{Q}^1 \cup \ldots \cup \hat{Q}^{2n} \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k,$$

в случае, когда $x \in I_{d\varepsilon}(i \circ h)$, $0 \leqslant i \leqslant [m\varepsilon]$, берём $x = y + i \circ h$, где $y \in I_{d\varepsilon}(0)$, и расщепляем $Q_{d(1+\varepsilon)}((\omega - i \circ h) - y, m + [m\varepsilon], h)$, который содержит $Q_{d(1+\varepsilon)}(\omega - y, m, h)$, по вышеуказанной схеме.

Рассмотрим $f(x) = \chi_{-Q}(x)$ — характеристическую функцию множества $-Q$. Тогда, учитывая приведённые соображения и с помощью замены переменных, имеем

$$\|Af\|_q = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{-Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)} \left|\int\limits_{-Q} K(x-y)\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)} \left|\int\limits_{Q-x} K(y)\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)} \left(\left|\int\limits_{Q_d(\omega,m,h)} K(y)\,dy\right| - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{2n}\left|\int\limits_{\hat{Q}^i} K(y)dy\right| - \sum_{i=1}^{2n}\left|\int\limits_{Q_i} K(y)\,dy\right|\right)^q dx\right)^{1/q}. \quad (7)$$

Из (3) имеем, что для любого гармонического отрезка $\bar{Q}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\bar{Q}|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_{\bar{Q}} K(x)\,dx\right| \leqslant \frac{2}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_{Q_d(x,m,h)} K(x)\,dx\right|,$$

$$\left|\int\limits_{\bar{Q}} K(x)\,dx\right| \leqslant \frac{2|\bar{Q}|^{1/p-1/q}}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_{Q_d(x,m,h)} K(x)\,dx\right|.$$

В силу выбора ε и согласно (5), (6) имеем, что

$$\frac{2|\hat{Q}^i|^{1/p-1/q}}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}} \leqslant 2(2^{n-1}\cdot\varepsilon)^{1/p-1/q} \leqslant \frac{1}{8n},$$

$$\frac{2|\hat{Q}^i|^{1/p-1/q}}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}} \leqslant \frac{1}{8n}.$$

Тогда, продолжая (7), получаем

$$\|Af\| \geqslant \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_{Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon,h])}\Bigg|\int\limits_{Q_d(\omega,m,h)} K(y)\,dy\Bigg|^q\Bigg)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{2}|Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)|^{1/q}\left|\int\limits_{Q_d(\omega,m,h)} K(y)\,dy\right|. \quad (8)$$

С другой стороны, в силу ограниченности оператора

$$\|Af\|_q \leqslant \|A\|\cdot\|f\| = \|A\|\cdot|Q|^{1/q} \leqslant 2^{2n}|Q_d(x,m,h)|^{1/q}. \quad (9)$$

$$|Q_{d\varepsilon}(0,[m\varepsilon],h)| = \prod_{i=1}^{n}\varepsilon d_i \cdot \prod_{i=1}^{k}[m_i\varepsilon] \geqslant \varepsilon^n\prod_{i=1}^{n} d_i \cdot \prod_{i=1}^{k}\left(m_i\varepsilon\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\prod_{i-k+1}^{n} m_i\varepsilon =$$

$$= \varepsilon^{2n}\cdot\frac{1}{2^k}|Q_d(x,m,h)| \leqslant \frac{\varepsilon^{2n}}{2^n}|Q_d(x,m,h)|. \quad (10)$$

Из (8), (9), (10) получаем, что существует C, зависящее только от p, q, n, такое что

$$C\cdot\frac{1}{|Q_d(x,m,h)|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_{Q_d(x,m,h)} K(x)\,dx\right| \leqslant \|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Следовательно,

$$C_1\sup_{e\in\mathfrak{Q}}\frac{1}{|e|^{1/p-1/q}}\left|\int\limits_e K(x)\,dx\right| \leqslant \|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что оператор (1), действующий из L_p в L_q, ограничен, но

$$J = \sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)\,dx \right| = +\infty.$$

Рассмотрим последовательность функций $\{K_i(x)\}_{i=1}^{+\infty}$, где

$$K_i(x) = \begin{cases} i \cdot \operatorname{sign} K(x), & \text{если } |K(x)| > i \text{ и } x \in I_{(i,\ldots,i)}(0), \\ K(x), & \text{если } |K(x)| \leqslant i \text{ и } x \in I_{(i,\ldots,i)}(0), \\ 0, & \text{если } x \notin I_{(i,\ldots,i)}(0). \end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{i\to+\infty} K_i(x) = K(x)$, по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{i\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_i(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy.$$

Тогда $A_i f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_i(x-y)f(y)\,dy$ является ограниченным оператором и

$$\sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K_i(x)\,dx \right| < +\infty.$$

Согласно лемме 3 существует константа C, не зависящая от $K_i(x)$, такая что

$$C \cdot \sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K_i(x)\,dx \right| \leqslant \|A_i\|_{L_p \to L_q}. \tag{11}$$

По теореме Банаха–Штейнгауза

$$\lim_{i\to+\infty} \|A_i\|_{L_p \to L_q} = \|A\|_{L_p \to L_q}. \tag{12}$$

Так как $J = +\infty$, то для любого M существует некоторый гармонический отрезок Q, такой что

$$\frac{1}{|Q|^{1/p-1/q}} \left| \int_Q K(x)\,dx \right| \geqslant 2M.$$

Тогда для всех достаточно больших i выполняется неравенство

$$\frac{1}{|Q|^{1/p-1/q}} \left| \int_Q K_i(x)\,dx \right| \geqslant M.$$

В силу произвольности M это означает, что

$$\lim_{i\to+\infty} \sup_{e \in \mathfrak{Q}} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K_i(x)\,dx \right| = +\infty.$$

Согласно (11), (12) $\|A\|_{L_p \to L_q} = +\infty$. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием теоремы, согласно которому $\|A\|_{L_p \to L_q} < +\infty$. Следовательно, $J < +\infty$. Тогда по лемме 3 получаем истинность утверждения теоремы.

Литература

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функции и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.

[2] O'Neil R. Convolution operators and $L(p,q)$ spaces // Duke Math. J. — 1963. — Vol. 30. — P. 129–142.

[3] Коротков В. Б. Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила в редакцию в апреле 1997 г.