— подмножество нестационарных для b' элементов. Если $\#(N \cap N') = 1$, то рассмотрим перестановку $b'' = (b')^{-1}bb'$. Тогда $c = b^{-1}b''$ является 3-циклом, и мы можем использовать лемму 3 для описания подгруппы $K = \langle a, c\rangle \subseteq H$. В частности, если n — простое число, то K, а значит, и H полна.

Приложение к теории групп монодромии плоских деревьев [3]. Пусть T — плоское дерево с n ребрами, вершины которого раскрашены в два цвета — белый и черный — так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Определим перестановки ребер a и b: вращение вокруг белых вершин против часовой стрелки — перестановка a, вращение вокруг черных вершин против часовой стрелки — перестановка b. Отметим, что ab есть n-цикл. Подгруппа $H = \langle a, b\rangle \subseteq S_n$ называется группой монодромии дерева T. Если T имеет 2 черные вершины валентности 2, а остальные черные вершины имеют валентность 1, то H порождена n-циклом и $(2,2)$-циклом. Тогда из теоремы вытекает, что T либо общее, либо редуцируемое (т. е. имеющее морфизм как плоское дерево в дерево с меньшим числом ребер) (см. [3]), либо (с точностью до зеркального отражения)

$$T = (()()(())((()))), \quad \text{либо} \quad T = (()()(())(((())))), \quad \text{либо} \quad T = (()(())(((()())))).$$

Приложение к теории Галуа. Пусть p — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ровно две пары комплексно-сопряженных корней (остальные корни вещественные). Тогда если степень многочлена p проста и больше семи, то его группа Галуа полная.

Литература

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. Наука, М., 1976. **2.** *Janusz G. J.* L'Enseign. Math., **38**, 41–53 (1992). **3.** *Кочетков Ю. Ю.* УМН, **50**, 163–164 (1995).

Московский государственный институт электроники и математики

Поступило в редакцию 1 декабря 1995 г.

УДК 517.5

Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$

© 1997. Е. Д. Нурсултанов

1. Метод вещественной интерполяции, имеющий своим истоком фундаментальную теорему Марцинкевича, введен Лионсом и Петре в [1, 2]. Этот метод описывается функтором

$$\Phi_{\theta q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\varphi(t))^q \,\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

В [3] Петре заметил, что при широких условиях на функционал Φ данный функтор определяет интерполяционный метод с многими свойствами вещественного метода. Центральным результатом в этом направлении является теорема о реитерации [4, 5]:

$$(\bar{A}_{\Phi_1}, \bar{A}_{\Phi_2})_F = \bar{A}_{F(\Phi_1, \Phi_2)}, \tag{1}$$

показывающая, что задача интерполяции пары A_{Φ_1}, A_{Φ_2} сводится к интерполяции параметров Φ_1 и Φ_2 (см. [4]).

В данной заметке вводится функтор $\Phi_{\theta\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, порождающий многопараметрическое пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}$. Изучаются интерполяционные свойства этих пространств, которые, согласно (1), решают проблему реитерации для соответствующего метода. Предложенный метод многопараметрической интерполяции позволяет описать более тонкие шкалы пространств Бесова $B^{\alpha}_{p\vec{q}}$ и уточнить теорему о билинейной интерполяции.

Выражения вида $(\sum_k |\xi_k|^q)^{1/q}$, $(\int_\Omega |f|^q \, d\mu)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимаются как $\sup_k |\xi_k|$, $\operatorname{es\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ соответственно.

2. Пусть $0 < \theta < 1$ и $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — вектор с координатами, удовлетворяющими условию $1 \leqslant q_i \leqslant \infty$, $i = 1, \dots, n$, причем если $q_i = \infty$, то и $q_j = \infty$ для всех $j \geqslant i$. Такие векторы назовем допустимыми.

Определим функционал

$$\Phi_{\theta q_1}(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^*(\varphi))^{q_1} \right)^{1/q_1},$$

где $\{\xi_k^*(\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\xi_k(\varphi) = \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} |\varphi(t)|^{1/(1-\theta)} \, dt \right)^{1-\theta}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\Phi_{\theta q_1, q_2, \dots, q_{n-1}}(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^*(\varphi))^{q_{n-1}} \right)^{1/q_{n-1}}. \tag{2}$$

Тогда функционал $\Phi_{\theta q_1, \dots, q_n}$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{\theta\vec{q}} = \Phi_{\theta q_1, \dots, q_n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^*(\varphi))^{q_n} \right)^{1/q_n},$$

где $\{\eta_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности

$$\eta_k(\varphi) = \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k} (\xi_m^*(\varphi))^{q_{n-1}} \right)^{1/q_{n-1}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

с ξ_k^* из представления (2).

Областью определения данного функционала будет множество всех измеримых на $(0, \infty)$ функций, для которых $\Phi_{\theta\vec{q}}(\varphi) < \infty$.

Пусть (Ω, μ) — пространство с положительной мерой. Для μ-измеримой функции f введем функцию распределения $m(\sigma, f)$ по формуле $m(\sigma, f) = \mu\{x :$

$|f(x)| > \sigma\}$. Функция $f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leqslant t\}$ называется невозрастающей перестановкой функции f. Многопараметрическое пространство Лоренца $L_{p\vec{q}}(\Omega)$ определяется как класс всех измеримых на Ω функций, для которых при $1-\theta = 1/p$

$$\|f\|_{L_{p\vec{q}}(\Omega)} = \Phi_{\theta\vec{q}}(f^*) < \infty\,.$$

Имеют место следующие свойства:

1°. Если $r = \min\{i : q_i \neq d_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и $q_r < d_r$, то $L_{p\vec{q}} \hookrightarrow L_{p\vec{d}}$.

2°. Если $\mu(\Omega) < \infty$ и $p \leqslant r$, то $L_{r\vec{d}} \hookrightarrow L_{p\vec{q}}$.

3°. Неравенство Гёльдера. Если $\vec{p}$, $\vec{q}$ — допустимые векторы, то

$$\int_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_{L_{p\vec{q}}}\|g\|_{L_{p'\vec{q}'}}\,,$$

где $1/p + 1/p' = 1/q_i + 1/q_i' = 1$.

4°. Неравенство Юнга (обобщенное). Пусть $\vec{q}_i$ — допустимые векторы, $\vec{1} \leqslant \vec{q}_i \leqslant \vec{\infty}$, $i = 1, 2, 3$, и $1 \leqslant s, p, r \leqslant \infty$. Тогда

$$\|f * g\|_{L_{s\vec{q}_1}} \leqslant c\|f\|_{L_{p\vec{q}_2}}\|g\|_{L_{r\vec{q}_3}}\,,$$

где $1 + 1/s = 1/p + 1/r$ и $1/\vec{q}_1 = 1/\vec{q}_2 + 1/\vec{q}_3$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$ *и* $\vec{q}$, $\vec{q}_0$, $\vec{q}_1$ *— допустимые векторы. Тогда* $(L_{p_0\vec{q}_0}, L_{p_1\vec{q}_1})_{\theta\vec{q}} = L_{p\vec{q}}$, *где* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{q}_0 = (q_1, \ldots, q_{r-1}, q_r^0, \ldots, q_n^0)$, $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_m)$, $\vec{q}_1 = (q_1, \ldots, q_{r-1}, q_r^1, \ldots, q_n^1)$ *— допустимые векторы и* $q_r^0 \neq q_r^1$. *Тогда*

$$(L_{p\vec{q}_0}, L_{p\vec{q}_1})_{\theta\vec{d}} = L_{p\vec{q}},$$

где $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_{r-1}, q_r, d_1, \ldots, d_m)$, $1/q_r = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$.

3. Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — совместимая пара нормированных пространств [1] и $K(t, a) = K(t, a, \bar{A}) = \inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$ — функционал Петре. Определим пространство $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ как множество элементов a из $\Sigma(\bar{A})$, для которых

$$\|a\|_{\bar{A}_{\theta\vec{q}}} = \Phi_{\theta\vec{q}}(K(t, a)/t) < \infty\,.$$

Заметим, что в случае $\vec{q} = (q, \ldots, q)$ $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ совпадает с пространством $A_{\theta q}$, полученным путем применения вещественного метода.

Теорема 3. (а) *Пространство* $\bar{A}_{\theta\vec{q}}$ *является промежуточным относительно пары* $\bar{A} = (A_0, A_1)$, *т. е.* $\Delta(\bar{A}) \subset \bar{A}_{\theta\vec{q}} \subset \Sigma(\bar{A})$.

(б) *Если* T *— линейный оператор,* $T\colon (A_0, A_1) \to (B_0, B_1)$, *то* $T\colon \bar{A}_{\theta\vec{q}} \to \bar{B}_{\theta\vec{q}}$.

Теорема 4. *Пусть* $\bar{A} = (A_0, A_1)$ *— совместимая пара.*

(а) *Если* $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ *— допустимые векторы,* $r = \min\{i : q_i \neq d_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ *и* $q_r < d_r$, *то* $\bar{A}_{\theta\vec{q}} \subset \bar{A}_{\theta\vec{d}}$.

(б) *Если* $\Delta(\bar{A})$ *плотно в* A_0 *и* A_1 *и* $\vec{1} \leqslant \vec{q} < \vec{\infty}$, $0 < \theta < 1$, *то* $(A_0, A_1)^*_{\theta\vec{q}} = (A_0^*, A_1^*)_{\theta\vec{q}'}$, *где* $1/q_i + 1/q_i' = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 5 (о реитерации). *Пусть* $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — *совместимая банахова пара,* $\vec{q}_0$, $\vec{q}_1$, $\vec{d}$ — *допустимые векторы,* $r = \min\{i : q_i^0 \neq q_i^1,\ i = 1, \ldots, n\}$. *Тогда при* $\vec{q} = (q_1^0, \ldots, q_{r-1}^0, q_r, d_1, \ldots, d_m)$, $1/q_r = (1-\eta)/q_r^0 + \eta/q_r^1$

$$(\bar{A}_{\theta\vec{q}_0}, \bar{A}_{\theta\vec{q}_1})_{\eta\vec{d}} = \bar{A}_{\theta\vec{q}}.$$

Если $\theta_0 \neq \theta_1$ *и* $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$, *то*

$$(\bar{A}_{\theta_0\vec{q}_0}, \bar{A}_{\theta_1\vec{q}_1})_{\eta\vec{d}} = \bar{A}_{\theta\vec{d}}.$$

Теорема 6 (о билинейной интерполяции). *Пусть* T — *билинейный оператор,* $T\colon (A_0, A_1) \times (B_0, B_1) \to (C_0, C_1)$. *Тогда* $T\colon \bar{A}_{\theta p\vec{d}} \times \bar{B}_{\theta r\infty} \to \bar{C}_{\theta q\vec{d}}$ *и, в частности,* $T\colon \bar{A}_{\theta p} \times \bar{B}_{\theta r\infty} \to \bar{C}_{\theta q}$. *Здесь* $1 + 1/q = 1/p + 1/r$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Овчинникову за полезные обсуждения результатов данной работы.

Литература

1. *Lions J.-L.* I–III, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13**, 389–403 (1959); Ibid, **14**, 317–331 (1960); J. Math. Pures Appl., **42**, 195–203 (1963). **2.** *Lions J.-L., Peetre J.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **19**, 5–68 (1964). **3.** *Peetre J.* Lecture Notes, Brasilia, 1963 [Notas de Matematica, Vol. 39, 1968, pp. 1–68]. **4.** *Дмитриев В. И., Овчинников В. И.* ДАН СССР, **246**, №4, 794–797 (1979). **5.** *Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я.* ДАН СССР, **256**, №1, 14–17 (1981).

Институт прикладной математики
НАН Республики Казахстан

Поступило в редакцию
6 июня 1995 г.
В переработанном виде
27 марта 1996 г.

УДК 512.7+514.14

Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия*

 А. Ю. Окуньков

Красивая формула для степени сферического многообразия была получена Б. Я. Казарновским [7] (в частном случае) и М. Брионом [4] (в общем случае). Эта формула обобщает теорему Кушниренко [8] (см. также, например, [11] и [1]). Для нормального сферического многообразия Брион вычислил весь полином Гильберта. Мы сформулируем эти результаты в следующей форме.

* Автор благодарен Международному научному фонду и Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку