Об интегральных операторах в L_p-пространствах

А. Г. КОСТЮЧЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Е. Д. НУРСУЛТАНОВ
Институт прикладной математики, г. Караганда

УДК 517.9

Ключевые слова: интегральный оператор, пространство Лоренца, спектральный радиус.

Аннотация

На модельной задаче изучается влияние взаимного расположения особенностей ядра интегрального оператора на его норму, спектральный радиус. Получены верхние и нижние оценки нормы интегральных операторов в пространствах Лоренца. На основе этих неравенств вводится отношение частичного порядка, позволяющее в некоторых случаях сравнивать нормы интегральных операторов.

Abstract

A. G. Kostyuchenko, E. D. Nursultanov, On integral operators in L_p-spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 2, p. 475–491.

On the model problem the influence of mutual disposition of singularities of the integral operator's kernel onto its norm and spectral radius is studied. The upper and lower estimations of norm of integral operators in Lorentz spaces are obtained. On the basis of these inequalities, the partial order relation is introduced that permits in some cases to compare the norms of integral operators.

Пусть Q — либо единичный куб в $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n$,

$$Tf(y) = \int_Q T(x,y)f(x)\,dx \text{ —}$$

интегральный оператор в $L_2(Q)$.

Вычисление либо получение оценок нормы оператора T является важной и сложной задачей теории операторов. Так, если $T(x,y)$ — симметричное ядро, то норма интегрального оператора в L_2 совпадает с его спектральным радиусом, который, в свою очередь, в приложениях связан с резонансными явлениями описываемых объектов. В связи с этим важно не только вычислять, но и как-то «управлять» нормой оператора.

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 2, с. 475–491.

В первой части работы на модельной задаче изучается влияние расположения особенностей ядра $T(x,y)$ в $Q\times Q$ на значение нормы $\|T\|_{L_2\to L_2}$, спектрального радиуса $r(T)$ оператора, т. е. исследуется задача управления $\|T\|_{L_2\to L_2}$, $r(T)$ за счет перераспределения особенностей ядра интегрального оператора.

Во второй части получены новые оценки нормы интегрального оператора в пространствах Лебега и Лоренца. На основе этих результатов во множестве интегральных операторов вводится отношение частичного порядка, относительно которого предлагается решать экстремальные задачи для нормы оператора общего вида (не вычисляя саму норму).

§ 1. Модельная задача

Пусть $\delta > 0$, $0 < \alpha < n$, точки $a_k, b_j \in Q\times Q$ удовлетворяют условиям $|a_k - a_j| \geqslant \delta$, $|b_j - b_k| \geqslant \delta$, $|a_k - b_j| \geqslant \delta$, т. е. две точки не должны быть ближе чем δ. Соответственно этим точкам определим функцию

$$T(x,y;a,b) = T(z;a,b) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d_k\chi(a_k,\delta)(z)}{|z-a_k|^\alpha} - \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k\chi(b_k,\delta)(z)}{|z-b_k|^\alpha}, \tag{1}$$

где $d_k \geqslant 0$, $c_j \geqslant 0$, $k = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,M$, функция $\chi(a,\delta)(z)$ — характеристическая функция шара с центром в точке a радиуса $\delta/2$ из $\mathbb{R}^{2n}$.

З$_\mathbf{1}$. Через $T(a)$ обозначим оператор с ядром вида (1) при $c_k = 0$, $k = 1,\dots,M$, то есть

$$T_a(x,y) = \sum_{k=1}^{N} d_k \frac{\chi(a_k,\delta)}{|z-a_k|^\alpha}.$$

Как надо расположить точки $a_1, a_2, \dots, a_N$, чтобы

а) норма $\|T(a)\|_{L_2\to L_2}$ была бы максимальной (минимальной)?

б) спектральный радиус $r(T(a))$ был бы максимальным (минимальным)?

З$_\mathbf{2}$. Пусть $c_k = 0$, $a_1,\dots,a_{N-1}$ — заданные точки в $Q\times Q$. Как расположить точку a_N, чтобы

а) норма $\|T\|_{L_2\to L_2}$ была бы максимальной (минимальной)?

б) спектральный радиус $r(T(a))$ был бы максимальным (минимальным)?

З$_\mathbf{3}$. Известно, что имеются управляющие точки $b_1,\dots,b_M$. Как расположить точки $a_1,\dots,a_N$ в $Q\times Q$, чтобы независимо от произвольности расположения точек $b_1,\dots,b_M$ эффект был бы минимальным (имеется в виду, что если $\|T\|$ уменьшится, то минимально)?

Решение модельной задачи. Пусть $x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_m$ — точки из Q, такие что $|x_i - x_k|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \delta$, $i \neq k$, $|y_k - y_i|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \delta$, $i \neq k$. Тогда набор точек из $Q\times Q$ вида $P = \{(x_k,y_j)\}_{k=1}^{r}{}_{j=1}^{m}$ назовём прямоугольной решёткой в $Q\times Q$ размерности $r\times m$.

Введём обозначение:

$$V = \sup_{\|f\|_2=\|g\|_2=1} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)\chi(0,\delta)(z)\,dz}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}. \tag{2}$$

Утверждение 1.

1. *Пусть* $P = \{(x_k, y_j)\}_{k=1}^{r}\,{}_{j=1}^{m}$ *— произвольная решётка в* $Q\times Q$ *размерности* $r\times m$. *Если* $a^0 = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^{r}\,{}_{l=1}^{m}$, *то*

$$\|T(a^0)\|_{L_2\to L_2} = V \sup_{\|\alpha\|_{l_2}=\|\beta\|_{l_2}=1} \left|\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\alpha_k\beta_l\right|.$$

2. *Пусть* a^0 *— произвольная решётка в* $Q\times Q$ *размерности* $1\times N$. *Тогда*

$$\sup_{\{a_k\}_{k=1}^N\subset Q\times Q} \|T(a)\|_{L_2\to L_2} = \|T(a^0)\|_{L_2\to L_2} = V\left(\sum_{k=1}^{N} d_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. 1. Пусть $P = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^{r}\,{}_{l=1}^{m}$ — решётка размерности $r\times m$ в $Q\times Q$, $\varepsilon>0$, g_ε и f_ε такие, что $\|g_\varepsilon\|_{L_2}=1$, $\|f_\varepsilon\|_{L_2}=1$, $\{x\colon\ f_\varepsilon(x)\neq 0\}\subset \subset\{x\colon\ |x|<\delta\} = B(0,\delta)$, $\{y\in Q\colon\ g_\varepsilon(y)\neq 0\}\subset B(0,\delta)$ и

$$\iint\limits_{\{(x,y)\colon\ x^2+y^2<\delta^2\}} \frac{f_\varepsilon(x)g_\varepsilon(y)}{|x^2+y^2|^{\alpha/2}}dx\,dy > V-\varepsilon.$$

Существование таких функций следует из определения числа V.

Для произвольных наборов неотрицательных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{r}$, $\{\beta_l\}_{l=1}^{m}$, удовлетворяющих условиям $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k^2=1$, $\sum\limits_{l=1}^{m}\beta_l^2=1$, определим функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k f_\varepsilon(x+x_k),$$
$$g(x) = \sum_{l=1}^{m}\beta_l g_\varepsilon(x+y_l).$$

Так как шары $\{B(x_k,\delta)\}_{k=1}^{r}$ взаимно не пересекаются, то $\|f\|_{L_2}=1$. Аналогично, $\|g\|_{L_2}=1$. Поэтому

$$\|T(a)\|_{L_2\to L_2} \geqslant \int\limits_Q\int\limits_Q f(x)g(y)T_a(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\beta_l\alpha_k(V-\varepsilon).$$

Учитывая произвольность выбора $\varepsilon>0$ и последовательностей $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ и $\{\beta_l\}_{l=1}^{N}$, имеем

$$\|T(a^0)\|_{L_2\to L_2} \geqslant \sup_{\|\alpha\|_{l_2}=1,\ \|\beta\|_{l_2}=1} \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\alpha_k\beta_l.$$

Покажем, что верно и обратное неравенство. Действительно, учитывая неотрицательность ядра, получим

$$\|T(a^0)\|_{L_2\to L_2} = \sup\Biggl\{ \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl} \iint\limits_{B((x_k,y_l),\delta)} \frac{f(x)g(y)}{((x-x_k)^2+(y-y_l)^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx\,dy\colon$$

$$\|f\|_{L_2}=1,\ \|g\|_{L_2}=1,\ f\geqslant 0,\ g\geqslant 0\Biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\Biggl\{ \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl} \iint\limits_{B((x_k,y_l),\delta)} \frac{f_k(x)g_l(y)}{((x-x_k)^2+(y-y_l)^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx\,dy\colon$$

$$\sum_{k=1}^{r}\|f_k\|_{L_2}^2=1,\ \sum_{l=1}^{m}\|g_l\|_{L_2}^2=1\Biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\Biggl\{ V\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\|f_k\|_{L_2}\|g_l\|_{L_2}\colon\ \sum_{k=1}^{r}\|f_k\|_{L_2}^2 = \sum_{l=1}^{m}\|g_l\|_{L_2}^2 = 1\Biggr\},$$

что и требовалось доказать.

2. Так как ядра операторов $T(a)$ неотрицательны, то

$$\|T(a)\| = \sup\Biggl\{ \int\limits_Q\int\limits_Q f(x)g(y)T_a(x,y)\,dx\,dy\colon \qquad f(x)\geqslant 0,\ g(y)\geqslant 0,\ \|f\|_{L_2}=\|g\|_{L_2}=1\Biggr\}.$$

Пусть $B(a_k,\delta)$ — шары в $Q\times Q$ с центрами в точках $a_k=(x_k,y_k)$ радиуса $\frac{\delta}{2}$, $B(x_k,\delta), B(y_k,\delta)$ — шары в Q с центрами соответственно в точках x_k и y_k. Для произвольных неотрицательных функций f и g из L_2 имеем

$$\sum_{k=1}^{N} d_k \int\limits_Q\int\limits_Q \frac{f(x)g(x)\chi(a_k,\delta)(z)}{|z-a_k|^\alpha}\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{N} d_k \int\limits_{B(a_k,\delta)} \frac{f(x)g(x)}{|z-a_k|^\alpha}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} d_k V \Biggl(\int\limits_{B(x_a,\delta)} |f(x)|^2\,dx\Biggr)^{\frac12} \Biggl(\int\limits_{B(y_k,\delta)} |g(x)|^2\,dx\Biggr)^{\frac12}. \quad (3)$$

Так как шары $\{B(a_k,\delta)\}_{k=1}^N$ взаимно не пересекаются, то для их проекций имеем либо $B(x_j,\delta)\cap B(x_i,\delta)=\varnothing$ при $i\neq j$, либо $B(y_j,\delta)\cap B(y_i,\delta)=\varnothing$. Поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского, последнее выражение в (3) оценим через

$$V\Biggl(\sum_{k=1}^{N} d_k^2\Biggr)^{\frac12} \Biggl(\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{N} B(x_k,\delta)} |f(x)|^2\,dx\Biggr)^{\frac12} \Biggl(\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{N} B(y_k,\delta)} |g(x)|^2\,dx\Biggr)^{\frac12}.$$

С другой стороны, если a^0 — решётка размерности $1 \times N$, то норма соответствующего оператора, согласно утверждению пункта 1, равна

$$\|T(a^0)\|_{L_2 \to L_2} = V \left(\sum_{k=1}^{N} d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Утверждение 2. *Пусть $d_1 = \ldots = d_N = d$, P — прямоугольная решётка размерности $([N^{1/2}] + 1) \times ([N^{1/2}] + 1)$, главная диагональ которой лежит во множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}\colon\ x = y\}$, $P \subset Q \times Q$. Тогда*

$$\sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q \times Q} r(T(a)) \leqslant V \cdot N^{\frac{1}{2}} \cdot d,$$

$$\sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset P} r(T(a)) \geqslant V \cdot [N^{\frac{1}{2}}] \cdot d,$$

где $[N^{1/2}]$ — целая часть числа $N^{1/2}$.

Доказательство. Известно, что

$$r(T(a)) \leqslant \|T(a)\|_{L_2 \to L_2},$$

тогда из утверждения 1 следует, что

$$\sup_{a \subset Q \times Q} r(T(a)) \leqslant dN^{\frac{1}{2}} V.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > N$, $P = \{(x_k, y_l)\}_{k=1}^{n}{}_{l=1}^{n}$ — произвольная решётка в $Q \times Q$ с главной диагональю во множестве $\{(x, y) \in Q \times Q\colon\ x = y\}$. Найдётся симметричная решётка $P_0 \subset P$ размерности $[N^{1/2}] \times [N^{1/2}]$ и набор точек $a = \{a_k\}_{k=1}^N$, такие что первые $k_0 = [N^{1/2}]^2$ точек образуют решётку P_0. Тогда для соответствующего представления $a = \{a_k\}_{k=1}^{k_0} \cup \{a_k\}_{k=k_0+1}^{N} = a_1 \cup a_2$ имеет место $T(a) = T(a_1) + T(a_2)$,

1) $T(a_1)$ — самосопряженный оператор,

2) $(T(a_1)f, f) \leqslant (T(a)f, f)$ для любого $f \in L_2(Q)$.

Следовательно, $r(T(a_1)) \leqslant r(T(a))$, но $r(T(a_1)) = \|T(a_1)\|_{L_2 \to L_2} = V[N^{1/2}]d$. Таким образом, из утверждения 1 следует $r(T(a)) \geqslant V[N^{1/2}]d$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть решётка $a^0 = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ из $Q \times Q$ такова, что для $k = 1, 2, \ldots, N$ множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}\colon\ |x - x_k| \leqslant \delta\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}\colon |y - y_k| \leqslant \delta\}$ не содержит ни одной точки (x_j, y_j) при $j \neq k$ (достаточно взять точки на диагонали, т. е. $x_k = y_k$, $k = 1, \ldots, N$, $|x_k - x_j| \geqslant \delta$). Тогда*

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q \times Q} \|T(a)\|_{L_2 \to L_2} = \|T(a^0)\| = V \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} d_k.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^N$, $|a_k - a_j| \geqslant \delta$,

$$\|T(a)\| \geqslant V \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} d_k. \tag{4}$$

Действительно, для любого $f \in L_2$ $(T(a)f, f) \geqslant (T(a_j)f, f)$, $j = 1, \dots, N$, где $T(a_j)$ — интегральный оператор с ядром $\frac{d}{|z-a_j|^\alpha}$. Но $\|T(a_j)\| = d_j V_j$, поэтому имеет место (4). С другой стороны, из утверждения 1 при

$$d_{kj} = \begin{cases} d_k, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

имеем

$$\|T(a_j)\|_{L_2} \leqslant \sup_{\|\alpha\|_2=\|\beta\|=1} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N d_{kj}\alpha_j\beta_j = \sup_{\|\alpha\|_2=\|\beta\|=1} \sum_{k=1}^N d_k\alpha_k\beta_k = \sup_{1\leqslant k\leqslant N} d_k.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Пусть точки $\{a_k^0\}_{k=1}^N = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^N$ таковы, что для $k = 1, 2, \dots, N$ множество $\{(x, y) \in Q \times Q\colon\ |x - y_k| \leqslant \delta\} \cup \{(x, y) \in Q \times Q\colon |y - x_k| \leqslant 2\delta\}$ не содержит ни одной точки из $\{a_k^0\}_{k=1}^N$. Тогда*

$$\inf_{\{a\}\subset Q\times Q} r(T(a)) = r(T(a_0)) = 0,$$

т. е. оператор $T(a)$ вольтерров.

Доказательство. Утверждение следует из того, что $T^2(a_0)f = T(a_0)(T(a_0)f) = 0$, т. е. $\|T^2\|_{L_2\to L_2} = \|T^3\|_{L_2\to L_2} = \dots = \|T^n\|_{L_2\to L_2} = 0$, отсюда $r(T(a_0)) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$.

Утверждение 5. *Пусть последовательность $a_1, \dots, a_{N-1}$ в $Q \times Q$ такова, что существует хотя бы одна решётка из $Q \times Q$, содержащая точки $a_1, \dots, a_{N-1}$ в качестве своих узлов. Если P_0 — наименьшая решётка, содержащая точки $a_1, \dots, a_{N-1}$, каждая строка и каждый столбец которой содержит хотя бы один узел, свободный от точек $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$, то*

$$\sup_{a_N\in Q\times Q} \|T(a_1, \dots, a_N)\|_{L_2\to L_2} = \sup_{a_N\in P_0} \|T(a_1, \dots, a_N)\|_{L_2\to L_2}.$$

Доказательство. Пусть $a_N^{(1)} \notin P_0 = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m}$. Если проекции шара $B(a_N^{(1)}, \delta)$ и множества $\bigcup\limits_{k=1}^{N-1} B(a_k, \delta)$ на $Q \times \{0\}$ и на $\{0\} \times Q$ не пересекаются, то из утверждения 1 следует, что

$$\|T(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N^{(1)})\|_{L_2\to L_2} = \\ = V \sup\biggl\{ \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{l=1}^{m+1} c_{kl}\alpha_k\beta_l\colon\ \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^2 = 1,\ \sum_{l=1}^{m+1} \beta_l^2 = 1 \biggr\},$$

где $c_{r+1\,m+1} = d_N$, $c_{kl} = d_s$ при $a_s = (x_k, y_l)$, $c_{kl} = 0$ в остальных случаях. В то же время если $a_N^{(2)} \in P_0$, то

$$\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(2)})\|_{L_2\to L_2}= \\ = V\sup\Big\{\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}c_{kl}\alpha_k\beta_l\colon\ \sum_{k=1}^{r}\alpha_k^2=1,\ \sum_{l=1}^{m}\beta_l^2=1\Big\},$$

где $c_{kl}=d_s$ при $(x_k,y_l)=d_s$ и $c_{kl}=0$ в остальных случаях, откуда следует

$$\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(1)})\|_{L_2\to L_2}\leqslant\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(2)})\|_{L_2\to L_2}.$$

Пусть теперь проекции множеств $B(a_N^{(1)},\delta)$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{N-1}B(a_k,\delta)$ пересекаются на одном из пространств $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n\times\{0\}$. Заметим, что проекции множеств $B(a_N^{(1)},\delta)$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{N-1}B(a_k,\delta)$ не могут одновременно пересекаться в $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n\times\{0\}$, так как это противоречило бы условию $|a_N^{(1)}-a_k|\geqslant\delta$, $k=1,\ldots,N-1$.

Положим, что проекции этих множеств пересекаются в $\mathbb{R}^n\times\{0\}$. Если $a_N^{(1)}=(x^0,y^0)$, то найдется k_0, что $(x_{k_0},y_l)\in P_0$ и $|x_{k_0}-x^0|<\delta$.

Рассмотрим решётку $P_1=\{(x_k,y_l)\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m+1}$, где $y_{m+1}=y^0$. В качестве $a_N^{(2)}$ возьмём точку (x_{k_0},y_{m+1}), тогда $|a_N^{(2)}-a_k|\geqslant\delta$, $k=1,\ldots,N-1$, и

$$\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(2)})\|_{L_2\to L_2}= \\ = V\sup\Big\{\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m+1}c_{kl}\alpha_k\beta_l\colon\ \sum_{k=1}^{r}\alpha_k^2=1,\ \sum_{l=1}^{m}\beta_l^2=1\Big\}\geqslant \\ \geqslant\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(1)})\|_{L_2\to L_2}.$$

Но так как из определения решётки P_0 в столбце k_0 найдётся узел, не занятый точками $a_1,a_2,\ldots,a_{N-1}$, то

$$\|T(a_1,\ldots,a_{N-1},a_N^{(2)})\|_{L_2\to L_2}\leqslant\sup_{a_N\in P_0}\|T(a_1,\ldots,a_N)\|_{L_2\to L_2}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Пусть $N=rm$, $\{a_k\}_{k=1}^N$ — набор точек, расположенных в узлах прямоугольной решётки P размерности $r\times m$. Тогда*

$$\|T(a)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|T(a,b)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)}$$

для любых наборов $\{b_k\}$ из $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, таких что $|b_j-a_k|\geqslant\delta$, $j=1,\ldots,M$, $k=1,\ldots,N$, $|b_j-b_i|\geqslant\delta$ при $j\neq i$, $|a_k-b_i|\geqslant\delta$ при $i\neq k$. Здесь $T(a)$ — оператор с ядром (1) при $c_1=\ldots=c_M=0$.

Доказательство. Пусть $a=P=\{(x_k,y_l)\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m}$, $f_\varepsilon(x),g_\varepsilon(x)$ из утверждения 1, т. е.

$$\|g_\varepsilon\|=1,\quad \|f_\varepsilon\|=1,$$
$$\{x\colon\ f_\varepsilon(x)\neq0\}\subset\{x\colon\ |x|<\delta\},\quad \{y\colon\ g_\varepsilon(y)\neq0\}\subset\{y\colon\ |y|<\delta\}$$

и

$$\int\limits_{\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant\delta^2\}} \frac{f_\varepsilon(x)g_\varepsilon(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,dx\,dy > V-\varepsilon,$$

$$f_0(x)=\sum_{k=1}^{r}\alpha_k f_\varepsilon(x+x_k), \quad g_0(y)=\sum_{l=1}^{m}\beta_k g_\varepsilon(y+y_l).$$

Так как ни для одного шара $B(b_j,\delta)$ проекции $B(b_j,\delta)$ не пересекаются с проекциями $\bigcup\limits_{k=1}^{N} B(a_k,\delta)$ одновременно в $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n\times\{0\}$, то

$$\|T(a,b)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} T(x,y;a,b)f_0(x)g_0(y)\,dx\,dy = \\ = (V-\varepsilon)\biggl(\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\alpha_k\beta_l\biggr)$$

для любого $\varepsilon>0$ и наборов $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k^2=\sum\limits_{l=1}^{m}\beta_k^2=1$, то согласно пункту 1 утверждения 1 имеем

$$\|T(a,b)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant V\sup\biggl\{\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\alpha_k\beta_l,\ \sum_{k=1}^{r}\alpha_k^2=\sum_{l=1}^{m}\beta_k^2=1\biggr\}=\|T(a)\|,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Интегральные операторы (pq)-слабого типа

Рассмотрим сетевое [1] пространство

$$\dot N_{q\infty}(M)=\biggl\{f:\ \sup_{e\in M}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\biggl|\int\limits_e f(x)\,dx\biggr|<\infty\biggr\}.$$

Здесь $|e|$ — мера множества e, M — фиксированное семейство измеримых множеств из $\mathbb{R}^n$, называемых сетью, $q'=q/(q-1)$.

Данное пространство является обобщением пространства Марцинкевича. Так, если M — множество всех компактов из области $G\subset\mathbb{R}^n$, то

$$\dot N_{q\infty}(M)=L_{p\infty}(G). \tag{5}$$

Лемма 1 ([1]). *Пусть $1<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $L_{pq}(G)$, $G\subset\mathbb{R}^n$, — пространство Лоренца, M — множество всех компактов из области G. Тогда*

$$\|f\|_{L_{pq}(G)} \sim \Biggl(\int\limits_0^\infty\biggl(\sup_{\substack{|e|>t\\ e\in M}}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p'}}}\biggl|\int\limits_e f(x)\,dx\biggr|\biggr)^q\frac{dt}{t}\Biggr)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 < q < \infty$, M — произвольная сеть в $\mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, X — некоторое полное нормированное пространство измеримых функций, определённых в области $G \subset \mathbb{R}^n$,*

$$Tf(y) = \int\limits_G f(x)K(x,y)\,dx \text{ —}$$

интегральный оператор, действующий из $X(G)$ в $N_{q\infty}(M)$. Тогда для того чтобы оператор T был ограничен из $X(G)$ в $N_{q\infty}(M)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{e\in M}\left\|\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p'}}}\int\limits_e K(\cdot,y)\,dy\right\|_{X^*} < \infty, \tag{6}$$

и верно

$$\|T\|_{X\to N_{p\infty}(M)} = \sup_{e\in M}\left\|\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p'}}}\int\limits_e K(\cdot,y)\,dy\right\|_{X^*},$$

где X^* — сопряженное к X пространство.

Доказательство. Пусть выполнено условие (6), тогда для любого e из M выражение $\int\limits_G f(x)\frac{1}{|e|^{1/p'}}\int\limits_e K(x,y)\,dy\,dx$ определяет линейный функционал в X, и следовательно,

$$\|T\|_{X\to \dot N_{p\infty}(M)} = \sup_{\|f\|_X=1}\|Tf\|_{\dot N_{q\infty}(M)} =$$

$$= \sup_{\|f\|_X=1}\sup_{e\in M}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int\limits_e\int\limits_G f(x)K(x,y)\,dx\,dy\right| =$$

$$= \sup_{e\in M}\sup_{\|f\|_X=1}\left|\int\limits_G f(x)\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int\limits_e K(x,y)\,dy\,dx\right| = \sup_{e\in M}\left\|\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int\limits_e K(x,y)\,dy\right\|_{X^*}.$$

Обратное утверждение также следует из этого соотношения.

Определение 1. Будем говорить, что оператор T имеет (p,q)-слабый тип, если он ограниченно действует из $L_p(G)$ в $L_{q\infty}(\Omega)$.

Определение 2. Оператор T, ограниченно действующий из $L_{p1}(G)$ в $L_{q\infty}(\Omega)$, назовём оператором (p,q)-квазислабого типа.

Ясно, что если T является оператором (p,q)-слабого типа, то он является и оператором (p,q)-квазислабого типа. Отметим также, что для интегральных операторов условие (p,q)-квазислабой ограниченности самое слабое (в шкалах пространств Лоренца). Этот факт будет следовать из следствия 1, где показано, что для интегральных операторов ограниченность из L_{pr} в $L_{q\infty}$ при $0 < r < 1$ равносильна (p,q)-квазислабой ограниченности.

Пусть $e \subset \Omega$, $\omega \subset G$ — измеримые множества положительной меры. Тогда

$$F(e,\omega)=F(e,\omega,p,q)=\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int\limits_{e}\int\limits_{\omega}K(x,y)\,dy\,dx\right|.$$

Следствие 1. *Пусть $1<p,q<\infty$. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

1. *Интегральный оператор T имеет (p,q)-квазислабый тип.*

2. *Интегральный оператор T ограниченно действует из $L_{pr}(G)$ в $L_{q\infty}(\Omega)$, где $0<r\leqslant 1$.*

3. *$K\in \dot N_{(p'q),\infty}(M_1\times M_2)$, M_1 — множество всех компактных подмножеств Ω, M_2 — множество всех компактных подмножеств G, т. е.*

$$\sup_{\substack{e\in M_2\\ \omega\in M_1}} F(e,\omega)<+\infty,$$

причем имеют место соотношения

$$\|T\|_{L_{p1}\to L_{q\infty}}\sim\|T\|_{L_{pr}\to L_{q\infty}}\sim\|K\|_{\dot N_{(p'q),\infty}}.$$

Доказательство. Из теоремы 1 и (5) имеем

$$\|T\|_{L_{p1}\to L_{q\infty}}\asymp\sup_{\substack{|e|\in M_1\\ |\omega|\in M_2}} F(e,\omega)=\|K\|_{\dot N_{(p'q),\infty}}.$$

Докажем теперь, что условие 2 эквивалентно условиям 1 и 3. Действительно, из вложения $L_{pr}\hookrightarrow L_{p1}$ при $0<r\leqslant 1$ получим

$$\|T\|_{L_{pr}\to L_{q\infty}}\leqslant\|T\|_{L_{p1}\to L_{q\infty}}.$$

С другой стороны, если $\|T\|_{L_{pr}\to L_{q\infty}}<\infty$, то, взяв для произвольного $\omega\in M_1$ функцию $f_\omega(y)=\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\chi_\omega(y)$, получим

$$\sup_{e\in M_2}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int\limits_{e}\int\limits_{\omega}K(x,y)\,dy\,dx\right|\leqslant C\left\|\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\chi_\omega\right\|_{L_{pr}}=C.$$

Следовательно,

$$\|K\|_{\dot N_{(p'q),\infty}}\leqslant C\cdot\|T\|_{L_{pr}\to L_{q\infty}},$$

что и завершает доказательство.

Замечание 1. Из следствия 1 следует, что для интегральных операторов утверждения интерполяционной теоремы Марцинкевича–Кельдерона [2, стр. 149] и интерполяционная теорема И. Стейна и Г. Вейса [3, стр. 222] эквивалентны.

Следствие 2. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Для того чтобы интегральный оператор T был (p,q)-слабого типа, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\substack{|e|>0\\ e\in Q}}\left(\int\limits_0^\infty\left(\sup_{\substack{|\omega|>t\\ \omega\subset Q}}|F(e,\omega;p,q)|\right)^{p'}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty. \qquad (7)$$

Доказательство следует из теоремы 1 и (5).

Замечание 2. Крайние случаи $p = 1$ либо $q = \infty$ полностью изучены Л. В. Канторовичем и Г. П. Акиловым [4]. Ими доказан критерий ограниченности интегральных операторов из L_p в L_∞ и из L_1 в L_q. Заметим, что если в (7) вместо параметра q формально подставить ∞ либо p заменить на 1, то условие (7) будет существенно отличаться от условий Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, т. е. это условие будет необходимым, но не достаточным. Следовательно, в следствии 2 условия $1 < p \leqslant q < \infty$ существенны.

§ 3. Условия ограниченности интегрального оператора в пространствах Лоренца

В данном параграфе будут изучены достаточные условия ограниченности интегрального оператора

$$Tf(x) = \int T(x, y) f(y)\, dy,$$

действующего из пространства $L_{pv}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{qr}(\mathbb{R}^n)$.

Как и в § 2, через $F(e, \omega)$ будет обозначать функцию множеств

$$F(e, \omega; p, q) = \frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_e \int_\omega T(x, y)\, dx\, dy \right|.$$

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < r, v \leqslant \infty$, $1/v^+ = \max\{1 - 1/v, 0\}$. Функция $T(x, y)$ такова, что конечно одно из выражений*

$$I_1 = I_1(p, v; q, r) = \left(\int_0^\infty \sup_{|e| \geqslant s} \left(\int_0^\infty \left(\sup_{|\omega| \geqslant t} F_{pq}(\omega, e; T) \right)^{v^+} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{v^+}} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}}, \tag{8}$$

$$I_2 = I_2(p, v; q, r) = \left(\int_0^\infty \sup_{|\omega| \geqslant t} \left(\int_0^\infty \left(\sup_{|e| \geqslant s} F_{pq}(\omega, e; T) \right)^{r} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{v^+}{r}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{v^+}}, \tag{9}$$

тогда соответствующий интегральный оператор T ограничен из $L_{pv}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{qr}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|T\|_{L_{pv}(\mathbb{R}^n) \to L_{qr}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \min\{I_1, I_2\}. \tag{10}$$

Если же $r = \infty$ либо $v \leqslant 1$, то соответственно

$$\|T\|_{L_{pv}(\mathbb{R}^n) \to L_{q\infty}(\mathbb{R}^n)} \sim I_1(p, v; q, \infty), \quad \|T\|_{L_{pv}(\mathbb{R}^n) \to L_{qr}(\mathbb{R}^n)} \sim I_2(p, 1; q, r). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $1 < v \leqslant \infty$. Из леммы 1 следует

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \sim \sup_{\|f\|_{pv}=1}\left(\int_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int_e Tf(x)\,dx\right|\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{pv}=1}\left(\int_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_e T(x,y)\,dx\,dy\right|\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Применим неравенство Гёльдера для пространства Лоренца и лемму 1:

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \leqslant \left(\int_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}\left\|\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int_e T(x,y)\,dx\right\|_{p'v'}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \sim$$

$$\sim \left(\int_0^\infty \sup_{|e|\geqslant t}\left(\int_0^\infty\left(\sup_{|\omega|\geqslant s}F(e,\omega;p,q)\right)^{v'}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{r}{v'}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} = I_1.$$

Пусть теперь $0 < v \leqslant 1$. Из теоремы И. Стейна и Г. Вейса [3, стр. 220] следует

$$\|T\|_{L_{p1}\to L_{qr}} \leqslant \sup_{|\omega|\geqslant t}\left\|\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int_\omega T(x,y)\,dy\right\|_{qr}.$$

Воспользуемся леммой 1, получим

$$\|T\|_{L_{p1}\to L_{qr}} \leqslant c\sup_{|\omega|\geqslant 0}\left(\int_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}F(e,\omega;p,q)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} = I_1(p,1;q,r).$$

Но при $0 < v \leqslant 1$

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \leqslant \|T\|_{L_{p1}\to L_{qr}} \leqslant cI_1(p,1;q,r) = cI_1(p,v;q,r).$$

Таким образом, верно

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \leqslant cI_1. \tag{12}$$

Покажем теперь неравенство

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \leqslant cI_2. \tag{13}$$

Пусть $1/v^- = \min\{1, 1/v\}$. Из определения нормы интегрального оператора, неравенства Гёльдера и леммы 1 при $1 \leqslant r < \infty$ следует

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}} \leqslant \sup_{\substack{\|f\|_{pv^-}=1\\ \|g\|_{q'r'}=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} T(x,y)f(y)g(x)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|g\|_{q'r'}=1}\left\|\int_{\mathbb{R}^n} T(x,y)g(x)\,dx\right\|_{p'v^+} \leqslant$$

$$\leqslant c\sup_{\|g\|_{q'r'}=1}\left(\int_0^\infty\left(\sup_{|\omega|\geqslant s}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\int_\omega T(x,y)\,dy\,dx\right|\right)^{v^+}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{v^+}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^\infty\left(\sup_{|\omega|\geqslant s}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int\limits_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int\limits_e\left|\int\limits_\omega T(x,y)\,dy\,dx\right|\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{v^+}{r}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{v^+}}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^\infty\left(\sup_{|\omega|\geqslant s}\int\limits_0^\infty\left(\sup_{|e|\geqslant t}F(e,\omega;p,q)\right)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{v^+}{r}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{v^+}}=I_2.$$

При $r=\infty$ $I_1(p,v;q,r)\leqslant I_2(p,v;q,r)$, следовательно, оценка (13) в этом случае следует из (12).

Перейдём к доказательству второй части теоремы. Пусть $1<v\leqslant\infty$, $r=\infty$, тогда

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{q\infty}}=\sup_{\substack{\|f\|_{pv}=1\\ \|g\|_{q'1}=1}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}T(x,y)f(y)g(x)\,dx\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{\|g\|_{q'1}=1}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}T(x,y)g(x)\,dx\right\|_{p'v'}\geqslant\sup_{|e|\geqslant0}\left\|\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int\limits_e T(x,y)\,dx\right\|_{p'v'}.$$

Таким образом, из леммы 1 следует

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{q\infty}}\geqslant I_1(p,v;q,\infty).$$

Если теперь $0<v\leqslant1$, $0<r\leqslant\infty$, то, также используя лемму 1, получим

$$\|T\|_{L_{pv}\to L_{qr}}\leqslant\|T\|_{L_{p1}\to L_{qr}}=\sup_{\|f\|_{p1}=1}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}T(x,y)f(y)\,dy\right\|_{qr}\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{|\omega|\geqslant0}\left\|\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int\limits_\omega T(x,y)\,dy\right\|_{qr}\sim I_2(p,1;q,r)=I_2(p,v;q,r).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1/r+1=1/h+1/v$. *Если*

$$M_h=\left(\int\limits_0^\infty\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=t}F(e,\omega)\right)^h\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{h}},\tag{14}$$

то интегральный оператор T *ограничен из* $L_{pv}(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_{qr}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|T\|_{L_{pv}(\mathbb{R}^n)\to L_{qr}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\cdot M,$$

причем в случае $r=\infty$, $v=1$ *условие* (14) *является необходимым.*

Доказательство. Пусть e — произвольный фиксированный компакт положительной меры, $f^*(t),\Psi^*(t,e)$ — соответственно невозрастающие перестановки $f(x)$ и $\int\limits_e T(x,y)\,dy$. Пусть $\Psi(s,t)=\sup\limits_{|e|=t}\sup\limits_{|\omega|=s}F(e,\omega)$,

$$\sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|}\left|\int_e Tf(x)\,dx\right| = t^{-\frac{1}{q}}\sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_e T(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant t^{-\frac{1}{q}}\sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\int_0^\infty f^*(s)\Psi^*(s,e)\,ds \leqslant t^{-\frac{1}{q}}\sup_{|e|=t}\int_0^\infty s^{\frac{1}{p-1}}f^*(s)\frac{1}{s^{\frac{1}{p}}}\int_0^s \Psi^*(\xi,e)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-\frac{1}{q}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{p-1}}f^*(s)\sup_{|e|=t}\sup_{|\omega|=s}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\left|\int_\omega\int_e T(x,y)\,dx\,dy\right| ds =$$

$$= t^{-\frac{1}{q}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{p-1}}f^*(s)\Phi(s,t)\,ds.$$

Тогда

$$\|Tf\|_{qr} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}}\sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|}\left|\int_e Tf(x)\,dx\right|\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty s^{\frac{1}{p-1}}f^*(s)\Phi(s,t)\,ds\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Воспользуемся представлением

$$s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\Phi(s,t) = (s^{\frac{1}{p}}f^*)^{1-\frac{v}{r}}[s^{\frac{1}{p}}f^*]^{\frac{v}{r}}\Phi(s,t).$$

Применим неравенство Гёльдера с показателями $1/h' = 1/v - 1/r$, $1/h = 1 - 1/v + 1/r$:

$$\|Tf\|_{qr} \leqslant C\left(\int_0^\infty\left(\left(\int_0^\infty (s^{\frac{1}{p}}f^*(s))^v\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{v}-\frac{1}{r}}\left(\int_0^\infty (s^{\frac{1}{p}}f^*(s))^{\frac{vh}{r}}\Phi^h\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{h}}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= \|f\|_{pv}^{1-\frac{v}{r}}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty (s^{\frac{1}{p}}f^*(s))^{\frac{vh}{r}}\Phi^h(s,t)\frac{ds}{s}\right)^{\frac{r}{h}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Последовательно применяя замену $s \to st$, неравенство Минковского и замену $t \to t/s$, получим

$$\|Tf\|_{qr} \leqslant C\|f\|_{pv}^{1-\frac{v}{r}}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty ((st)^{\frac{1}{p}}f^*(st))^{\frac{vh}{r}}\Phi^h(t,st)\frac{ds}{s}\right)^{\frac{r}{h}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{pv}^{1-\frac{v}{r}}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty((st)^{\frac{1}{p}}f^*(st))^v\Phi^r(t,st)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{h}{r}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

$$=C\|f\|_{pv}^{1-\frac{v}{r}}\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^v\Phi^r\left(\frac{t}{s},t\right)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{h}{r}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Во внутреннем интеграле оценим

$$\Phi\left(\frac{t}{s},t\right)\leqslant\sup_{\frac{\sigma}{\tau}=s}\Phi(\tau,\sigma),$$

получим

$$\|Tf\|_{qr}\leqslant C\|f\|_{pv}\left(\int_0^\infty\Bigl(\sup_{\frac{\tau}{\sigma}=s}\Phi(\tau,\sigma)\Bigr)^h\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{h}}=C\|f\|_{pv}\left(\int_0^\infty\Bigl(\sup_{\frac{|\omega|}{|e|}=s}F(e,\omega)\Bigr)^h\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

При $h=\infty$, т. е. $v=1$, $r=\infty$, необходимость условия (14) следует из теоремы 1.

Следствие 3 (обобщённое неравенство Юнга–О'Нейла [5]). *Пусть* $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$, $1+1/q=1/p+1/r$, *тогда*

$$\|f*g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\cdot\|f\|_{L_{r\infty}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_p.$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство

$$\left(\int_0^\infty\Bigl(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}F(e,\omega;p,q)\Bigr)^r\frac{ds}{s}\right)\leqslant C\|f\|_{L_{r\infty}}.$$

Имеем:

$$\left(\int_0^1\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int_e\int_\omega f(x-y)\,dx\,dy\right)^r\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^1\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int_e\left|\int_{\omega-y}f(x)\,dx\right|dy\right)^r\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|\omega|>0}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\left|\int_\omega f(x)\,dx\right|\left(\int_0^1\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}\frac{|e|^{1-\frac{1}{q'}}}{|\omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right)^r\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{r}}=$$

$$=\left(\int_0^1 s^{\frac{r}{q}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{r\infty}=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{r\infty},$$

$$\left(\int_1^\infty\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{q'}}}\frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}}\int_\omega\int_e|f(x-y)\,dx\,dy|\right)^r\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|e|>0}\frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\left|\int_e f(x)\,dx\right|\left(\int_1^\infty\left(\sup_{\frac{|e|}{|\omega|}=s}\frac{|\omega|^{\frac{1}{p'}}}{|e|^{\frac{1}{p'}}}\right)^r\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{r}{p'}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{r\infty}.$$

Следствие доказано.

Пусть Q — единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Для интегрального оператора

$$Tf(x)=\int_Q T(x,y)f(y)\,dy$$

определим функцию

$$\Phi_T(s,t)=\sup_{\substack{|\omega|\geqslant s,\\ |e|\geqslant t}}\frac{1}{|\omega|}\frac{1}{|e|}\left|\int_e\int_\omega T(x,y)\,dy\,dx\right|,\quad e\subset Q,\quad \omega\subset M. \tag{15}$$

Тогда согласно теоремам 1 и 3 имеет место соотношение

$$c_1\sup_{\substack{t>0\\ s>0}}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(s,t)\leqslant\|T\|_{L_p\to L_q}\leqslant c_2\left(\int_0^\infty\left(\sup_{\frac{|t|}{|s|}=y}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(s,t)\right)^r\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{16}$$

Оценки, приведённые в этом соотношении, точны относительно параметров p и q. Так, для произвольного $\varepsilon>0$ найдётся c_ε, что

$$\|T\|_{L_{p+\varepsilon}\to L_{q-\varepsilon}}\leqslant c_\varepsilon\sup_{\substack{t>0\\ s>0}}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(t,s)$$

и

$$\left(\int_0^\infty\left(\sup_{\frac{|t|}{|s|}=y}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(s,t)\right)^r\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant c_\varepsilon\|T\|_{L_{p-\varepsilon}\to L_{q+\varepsilon}}.$$

Действительно, из (16)

$$\|T\|_{L_{p+\varepsilon}\to L_{q-\varepsilon}}\leqslant\left(\int_0^\infty\left(\sup_{\frac{|t|}{|s|}=y}t^{1-\frac{1}{p+\varepsilon}}s^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\Phi_T(s,t)\right)^r\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\substack{t>0\\ s>0}}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(s,t)\left(\int_0^\infty\left(\sup_{\substack{\frac{|t|}{|s|}=y,\\ 0<s,t\leqslant 1}}t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\varepsilon}}s^{\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q}}\right)^r\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{r}}=$$

$$=\sup_{\substack{t>0\\ s>0}}t^{\frac{1}{p'}}s^{\frac{1}{q}}\Phi_T(s,t).$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

В соотношении (16) функция $\Phi_T(t,s)$ непосредственно зависит от ядра интегрального оператора T. Функционалы же, действующие на функцию $\Phi_T(t,s)$, зависят лишь от параметров p и q. Если рассматривать пространства L_p и L_q как пространства Лоренца L_{pp} и L_{qq}, то, исследуя интегральные операторы уже в трехпараметрических пространствах Лоренца $L_{pv\tau}$ [6], можно получить соотношения с точностью до вторых параметров:

$$c_\varepsilon^{-1}\|T\|_{L_{pp-\varepsilon}\to L_{qq+\varepsilon}} \leqslant J_1(\Phi_T) \leqslant \|T\|_{L_p\to L_q} \leqslant J_2(\Phi_T) \leqslant c_\varepsilon\|T\|_{L_{pp+\varepsilon}\to L_{qq-\varepsilon}},$$

где J_1 и J_2 — монотонные функционалы, зависящие только от параметров p и q, функция $\Phi_T(t,s)$ определена равенством (15).

Таким образом, решение экстремальных задач для нормы оператора T, подобных модельной из § 1, имеет смысл заменить на исследование этих задач для функции $\Phi(t,s)$.

Во множестве интегральных операторов введём отношение частичного порядка.

Определение 3. Будем считать, что $T_1 \leqslant T_2$, если имеет место одно из следующих условий:

$$\Phi_{T_1}(s,t) \leqslant \Phi_{T_2}(s,t), \quad t,s \in (0,\infty),$$
$$\Phi_{T_1}(s,t) \leqslant \Phi_{T_2}(t,s), \quad t,s \in (0,\infty).$$

Интегральные операторы T и T^* равны относительно введённого отношения порядка, т. е. $T \leqslant T^*$ и $T^* \leqslant T$. Данный факт вполне согласуется с соотношением $\|T\| = \|T^*\|$.

Легко проверяется, что расположения точек управления из утверждений 1–4 реализуют Ф-экстремумы соответствующего семейства операторов.

Литература

[1] Нурсултанов Е. Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сборник. — 1998. — Т. 189, № 3. — С. 83–102.

[2] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.

[3] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.

[4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959.

[5] O'Neil R. O. Convolution operators and L_{pq} spaces // Duke Math. J. — 1963. — V. 30. — P. 129–142.

[6] Нурсултанов Е. Д. Многопараметрический интерполяционный функтор и пространство Лоренца $P_{p\vec{q}}$, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ // Функц. анализ и его прилож. — 1997. — Т. 31, № 2. — С. 79–82.

Статья поступила в редакцию в апреле 1998 г.