ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ “КАТАСТРОФАМИ”

А. Г. Костюченко, Е. Д. Нурсултанов

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, Q – либо $\mathbb{R}^n$, либо единичный куб в $\mathbb{R}^n$,

$$Tf(y) = \int_Q T(x,y) f(x)\,dx \tag{1}$$

– интегральный оператор из $L_p(Q)$ в $L_q(Q)$.

В данной работе на модельной задаче изучается влияние расположения особенностей ядра $T(x,y)$ в $Q\times Q$ на значение нормы $\|T\|_{L_2\to L_2}$ и спектральный радиус $r(T)$ оператора (1). Получены новые оценки нормы интегрального оператора в пространствах Лоренца и Лебега. Используя эти результаты, в пространстве интегральных операторов $\mathcal{L}(L_{pv}\to L_{qs})$ вводится отношение частичного порядка, позволяющее сравнивать нормы некоторых операторов, не вычисляя их.

1. Модельная задача. Пусть точки $a_k, b_j \in Q\times Q$ удовлетворяют условиям: $|a_k - a_j| \geqslant \delta$, $k \neq j$, т.е. две точки не должны сближаться больше чем на δ. $\chi_{a_k,\delta)}(z)$ – характеристическая функция шара с центром в точке a_k радиуса $\delta/2$ из $\mathbb{R}^{2n}$, $d_k > 0$, $k = 1,2,\dots,N$, $0 < \alpha < n$,

$$T_a(x,y) = T_a(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d_k \chi_{(a_k,\delta)}(z)}{|z-a_k|^\alpha}. \tag{2}$$

Интегральный оператор с ядром (2) обозначим через T_a.

З–1. Как надо расположить точки $a_1, a_2, \dots, a_N$ с условием $|a_i - a_j| \geqslant \delta > 0$ при $i \neq j$, чтобы

а) норма $\|T_a\|_{L_2\to L_2}$ была максимальной (минимальной)?

б) спектральный радиус $r(T_a)$ был максимальным (минимальным)?

З–2. Пусть $a_1, \dots, a_{N-1}$ – заданные точки в $Q\times Q$. Как расположить точку a_N, чтобы

а) норма $\|T_a\|_{L_2\to L_2}$ была максимальной?

б) спектральный радиус $r(T_a)$ был максимальным?

2. Решение модельной задачи. Пусть $x_1, \dots, x_r$, $y_1, \dots, y_m$ – точки из Q такие, что $|x_k - x_i|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \delta$ и $|y_k - y_i|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \delta$ при $i \neq k$. Тогда набор точек из $Q\times Q$ вида

$$P = \bigl\{(x_k, y_l)\bigr\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m}$$

назовем прямоугольной решеткой в $Q\times Q$ размерности $r\times m$.

Введем обозначение:

$$V = \sup_{\substack{\|f\|_2=1\\ \|g\|_2=1}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)g(y)\chi_{(0,\delta)}(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}\,dx\,dy.$$

Утверждение 1. а) *Пусть* $P = \bigl\{(x_k, y_l)\bigr\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m}$ – *произвольная решетка в* $Q\times Q$ *размерности* $r\times m$. *Если* $a^0 = \bigl\{(x_k, y_l)\bigr\}_{k=1}^{r}{}_{l=1}^{m}$, *то*

$$\|T_{a^0}\|_{L_2\to L_2} = V \sup_{\|\alpha\|_{l_2}=\|\beta\|_{l_2}=1} \biggl|\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} d_{kl}\alpha_k\beta_l\biggr|.$$

б) *Пусть* a^0 – *произвольная решетка в* $Q\times Q$ *размерности* $1\times N$. *Тогда*

$$\sup_{\{a_k\}_{k=1}^N\subset Q\times Q} \|T_a\|_{L_2\to L_2} = \|T_{a^0}\|_{L_2\to L_2} = V\biggl(\sum_{k=1}^{N} d_k^2\biggr)^{1/2}.$$

Утверждение 2. *Пусть* $d_1 = \dots = d_N = d$, $[N^{1/2}]$ – *целая часть числа* $N^{1/2}$, P – *прямоугольная решетка размерности* $\bigl([N^{1/2}]+1\bigr) \times \bigl([N^{1/2}]+1\bigr)$, *главная диагональ которой лежит в множестве* $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = y\bigr\}$, $P \subset Q \times Q$. *Тогда*

$$V \cdot [N^{1/2}] \cdot d \leqslant \sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset P} r(T_a) \leqslant \sup_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q\times Q} r(T_a) \leqslant V \cdot N^{1/2} \cdot d.$$

Утверждение 3. а) *Пусть* $a^0 = \bigl\{(x_k,y_k)\bigr\}_{k=1}^N$ *из* $Q \times Q$ *такова, что для* $k = 1,2,\dots,N$ *множество* $\bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x - x_k| \leqslant \delta\bigr\} \cup \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : |y - y_k| \leqslant \delta\bigr\}$ *не содержит ни одной точки* a_j *при* $j \neq k$. (*Достаточно взять точки на диагонали, т.е.* $x_k = y_k$, $k = 1,\dots,N$, $|x_k - x_j| \geqslant \delta\}$.) *Тогда*

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^N \subset Q\times Q} \|T_a\|_{L_2 \to L_2} = \|T_{a^0}\| = V \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant N} d_k.$$

б) *Пусть точки* $a^0 = \bigl\{(x_k,y_k)\bigr\}_{k=1}^N$ *таковы, что для* $k = 1,2,\dots,N$ *множество* $\bigl\{(x,y) \in Q \times Q : |x - y_k| \leqslant \delta\bigr\} \cup \bigl\{(x,y) \in Q \times Q : |y - x_k| \leqslant \delta\bigr\}$ *не содержит ни одной точки из* $\{a_k^0\}_{k=1}^N$. *Тогда*

$$\inf_{\{a\} \subset Q\times Q} r(T_a) = r(T_{a^0}) = 0,$$

т.е. оператор $T(a)$ – *вольтерров.*

Утверждение 4. *Пусть последовательность* $a_1,\dots,a_{N-1}$ *в* $Q \times Q$ *такова, что существует хотя бы одна решетка из* $Q \times Q$, *содержащая эти точки* $a_1,\dots,a_{N-1}$ *в качестве своих узлов. Если* P_0 – *наименьшая решетка, содержащая точки* $a_1,\dots,a_{N-1}$, *каждая строка и каждый столбец которой содержат хотя бы по одному узлу, свободному от точек* $\{a_k\}_{k=1}^N$, *то*

$$\sup_{a_N \in Q\times Q} \|T_a\|_{L_2 \to L_2} = \sup_{a_N \in P_0} \|T_a\|_{L_2 \to L_2}.$$

3. Оценка нормы интегрального оператора. Пусть M – семейство всех подмножеств $e \subset Q$ положительной меры $|e| > 0$. Для ядра $T(x,y)$ интегрального оператора (1) определим функцию множеств

$$F_{pq}(\omega,e;T) = \frac{1}{|\omega|^{1/p}}\,\frac{1}{|e|^{1/q'}}\left|\int_e \int_\omega T(x,y)\,dy\,dx\right|, \qquad e,\omega \in M.$$

Через $L_{pv}(Q)$ обозначим пространство Лоренца.

Теорема. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < r$, $v \leqslant \infty$, $1/v^+ = \max\{1 - 1/v, 0\}$. *Функция* $T(x,y)$ *такова, что конечно одно из выражений*

$$I_1 = \left(\int_0^\infty \sup_{|e| \geqslant s}\left(\int_0^\infty \Bigl(\sup_{|\omega| \geqslant t} F_{pq}(\omega,e;T)\Bigr)^{v^+}\frac{dt}{t}\right)^{r/v^+}\frac{ds}{s}\right)^{1/r},$$

$$I_2 = \left(\int_0^\infty \sup_{|\omega| \geqslant t}\left(\int_0^\infty \Bigl(\sup_{|e| \geqslant s} F_{pq}(\omega,e;T)\Bigr)^{r}\frac{ds}{s}\right)^{v^+/r}\frac{dt}{t}\right)^{1/v^+}.$$

Тогда соответствующий интегральный оператор T *ограничен из* L_{pv} *в* L_{qr} *и*

$$\|T\|_{L_{pv} \to L_{qr}} \leqslant \min\{I_1, I_2\}.$$

Если же $r = \infty$ *либо* $v \leqslant 1$, *то соответственно*

$$\|T\|_{L_{pv} \to L_{q\infty}} \sim I_1, \qquad \|T\|_{L_{pv} \to L_{qr}} \sim I_2.$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией 07.04.1998