М. Б. Муратбеков, М. Отелбаев УДК 517.988

ГЛАДКОСТЬ И АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

В работе рассматривается нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu = -\Delta u + q(x, u)u \tag{0.1}$$

в пространстве $L_2 \equiv L_2(R^3)$, который при $q(x, u) = q(x)$ является стационарным оператором Шрёдингера. Здесь Δ — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

Нас будет интересовать вопрос существования гладкого решения уравнения $Lu = f \in L_2(R^3)$, а также поведение n-поперечников по Колмогорову множества

$$M \equiv \{u \in W_2^1(R^3) : \| -\Delta u + q(x, u)u\|_2 \leqslant T\}, \tag{0.2}$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма в L_2, $W_2^1(R^3)$ — пространство Соболева.

В задаче о гладкости решения уравнения $Lu = f \in L_2(R^3)$ нас будет интересовать вопрос, когда вторые производные функций $u(x)$ принадлежат $L_2(R^3)$. Решение такого вопроса является трудным уже в линейном случае [1], [2], если потенциальная функция неограничена. Когда вместо R^3 рассматривается ограниченное множество, эта задача хорошо изучена и выяснены типичные трудности, встречающиеся в связи с плохим поведением $q(x, u)$ [3].

Указанную задачу мы решаем сведением к линейному случаю и дальнейшим использованием результатов работы [4]. Теоремы о существовании гладкого решения используются для получения двусторонних оценок n-поперечников по Колмогорову множества M. Двусторонние оценки поперечников множеств, связанных с нелинейными уравнениями в R^3, по-видимому, в этой работе получены впервые. О значимости наличия оценок, характеризующих аппроксимативные свойства решений, см. [5].

В работе принята двойная нумерация (номер параграфа, номер теоремы, леммы). Введем следующие обозначения: $D(\cdot)$ — область определения, $R(\cdot)$ — область значения, $\|\cdot\|_2$ — норма элемента $L_2 \equiv L_2(R^3)$, $W_2^l \equiv W_2^l(R^3)$ — пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_{2,l}$, $L_{2,\mathrm{loc}}$ — множество функций, модуль квадрата которых интегрируем локально в R^3, $C(R^3)$ — пространство непрерывных функций с обычный нормой, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ — различные постоянные числа.

§ 1. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера

Рассмотрим нелинейный оператор Шрёдингера, определенный в L_2 равенством (0.1) с областью определения $D(L) \equiv \{u \in W_2^1 : Lu \in L_2\}$. Следуя Эвеританному и Гирцу [1], [2], оператор L назовем разделимым в L_2, если из $u \in D(L)$ следует $-\Delta u \in L_2$ или эквивалентное ему включение $q(x, u)u \in L_2$. Будем предполагать, что функция $q(x, u)$ полуограничена снизу. Для наших целей, не ограничивая общности, можно считать $q(x, u) \geqslant 1$.

Рассмотрим уравнение $Lu = f \in L_2$. Функция $u \in L_2$ называется слабым решением уравнения $Lu = f$, если существует последовательность $\{u_n\} \in W_2^1 \cap W_{2,\mathrm{loc}}^2$ такая, что $\|u_n - u\|_{2,\mathrm{loc}} \to 0$; $\|Lu_n - f\|_{2,\mathrm{loc}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 1.1. *Пусть $q(x, u)$ непрерывна на любом компакте из $R^3 \times R$. Тогда для любого $f \in L_2$ существует слабое решение уравнения $Lu = f$, которое удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{C(R^3)} + \|u\|_{2,1} \leqslant c\|f\|_2, \tag{1.1}$$

где положительная постоянная c не зависит от f.

Доказательство. Пусть $q_N(x, u)$ — функция, равная $q(x, u)$, если $q(x, u) < N$, и равная N, если $q(x, u) \geqslant N$. Из леммы 1.1 работы [6] следует, что уравнение $-\Delta u + q_N(x, u) u = f \in L_2$ имеет решение $u_N \in W_2^1 \cap W_{2, \text{loc}}^2$.

Линейный оператор L_N, определенный равенством $L_N u = -\Delta u + \tilde{q}_N(x) u$, $\tilde{q}_N(x) = q_N(x, u_N(x)) \geqslant 1$, самосопряжен [7]. Поэтому уравнение $L_N u = f$ имеет единственное решение в L_2, которое совпадает с u_N.

Для доказательства леммы 1.1 воспользуемся известной

Леммой 1.2 [8]. *Пусть $0 \leqslant q_1(x) \leqslant q_2(x)$; $q_1(x)$, $q_2(x) \in L_{2, \text{loc}}(R^3)$. Тогда $\| L_2^{-1} \|_{2 \to 2} \leqslant \| L_1^{-1} \|_{2 \to 2}$, и для любого $x \in R^3$ выполнены неравенства $| L_i^{-1} u | (x) \leqslant (L_i^{-1} | u |)(x)$, $i = 1, 2$, $(L_2^{-1} | u |)(x) \leqslant (L_1^{-1} | u |)(x)$, где L_1^{-1} и L_2^{-1} — операторы, обратные к операторам $L_1 \equiv -\Delta + q_1(x)$, $L_2 \equiv -\Delta + q_2(x)$ соответственно.*

Выбирая $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = \tilde{q}_N(x)$, получим

$$| u_N | = | L_N^{-1} f | (x) \leqslant (L_N^{-1} | f |)(x) \leqslant L_0^{-1} | f |, \tag{1.2}$$

где L_0^{-1} — оператор, обратный к оператору $L_0 \equiv -\Delta + 1$.

Далее, известно, что оператор L_0^{-1} действует из L_2 в W_2^2. Поэтому в силу теорем вложения Соболева и соотношений (1.2) имеем

$$\| u_N(x) \|_{C(R^3)} \leqslant c_0 \| f \|_2, \tag{1.3}$$

где c_0 не зависит от N и f. С другой стороны, имеет место оценка

$$\| u_N \|_{W_2^1} \leqslant c_1 \| f \|_2, \tag{1.4}$$

в которой c_1 не зависит от N и f. Действительно, составим скалярное произведение $\langle L u_N, u_N \rangle$; интегрируя по частям, получим (1.4). Из (1.3) и (1.4) будем иметь $\| u_N \|_{C(R^3)} + \| u_N \|_{2, 1} \leqslant c \| f \|_2$, где $c = 2 \max(c_1, c_2)$. На основании этой оценки, стандартно рассуждая, получаем, что можно выбрать подпоследовательность u_N такую, что $u_N(x)$ при $N \to \infty$ имеет предел $u(x)$, который является слабым решением уравнения $Lu = f$ и удовлетворяет оценке (1.1). Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

i) *$q(x, u) \geqslant 1$ — непрерывная функция по совокупности переменных в $R^3 \times R$;*

ii) $\sup\limits_{|x - y| \leqslant 1} \sup\limits_{|c_3 - c_4| \leqslant A} \dfrac{q(x, c_3)}{q(y, c_4)} \leqslant F(A) < \infty$, *где A — любая конечная величина, $F(A)$ — непрерывная функция от A.*

Тогда: а) *существует решение уравнения $Lu = f \in L_2$ такое, что $q(x, u) u$, $\Delta u \in L_2$;*

б) *если $r(x)$ — непрерывная функция в R^3 и для любого $K > 0$ величина*

$$B = \sup_{x \in R^3} \sup_{|c_5| \leqslant K} \sup_{0 < \eta \leqslant q^{-1/2}(x, c_5)} \left[\eta^{-p} \int\limits_{|t - x| \leqslant \eta} | r(t) |^\theta \, dt \right]^{1/\theta}$$

конечна, то $r(x) \partial u / \partial x_i \in L_\theta(R^3)$, $i = 1, 2, 3$ $(2 < \theta < \infty$, $p = -\theta/2)$.

Доказательство. В силу леммы 1.1 для уравнения $Lu = f \in L_2$ существует решение $u(x)$, удовлетворяющее (1.1). Положим $\tilde{q}(x) = q(x, u(x))$ и рассмотрим линейное уравнение

$$\tilde{L} u = -\Delta u + \tilde{q}(x) u = f. \tag{1.5}$$

Так как $\tilde{q}(x) \in L_{2, \text{loc}}$ и $\tilde{q}(x) \geqslant 1$, то оператор $\tilde{L}$ самосопряжен и уравнение (1.5) имеет единственное решение, которое совпадает с $u(x)$, т. е. $u(x) \in D(L)$.

Далее, в силу условий i), ii) теоремы для оператора $\tilde{L}$ выполнены все условия теоремы 5.1 работы [4]. Следовательно, оператор $\tilde{L}$ разделим, т. е. $\|-\Delta u\|_2 + \|\tilde{q}(x) u\|_2 \leqslant c(\|\tilde{L}u\|_2 + \|u\|_2)$, где c не зависит от $u \in D(L)$.

Пункт б) теоремы вытекает из п. а) и теоремы работы [4].

§ 2. Оценки поперечников множества M

Обозначим через d_k k-поперечник по Колмогорову множества M, определенного равенством (0.2), в пространстве $L_2(R^3)$.

Напомним, что

$$d_k = \inf_{\{\mathcal{L}_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in \mathcal{L}_k} \|u - v\|_2,$$

где infimum берется по всем подпространствам $\mathcal{L}_k$ в L_2 размерности k.

Через $N(\lambda)$ обозначим количество поперечников d_k, больших $\lambda > 0$, т. е. функцию распределения d_k.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.1. *Предположим, что $q(x, u)$ удовлетворяет условиям* i), ii) *теоремы* 1.1. *Тогда справедливы оценки* $c_1\lambda^{-3/2} \operatorname{mes}(x: q(x, 0) \leqslant c_0^{-1}\lambda^{-1}) \leqslant N(\lambda) \leqslant c_2\lambda^{-3/2} \operatorname{mes}(x: q(x, 0) \leqslant c_0\lambda^{-1})$, *где c_1 и c_2 — постоянные, вообще говоря, зависящие от T, а c_0 — постоянное число, не зависящее от $q(x, 0)$.*

Для доказательства теоремы 2.1 нам необходимо несколько лемм.

Лемма 2.1. *Пусть функция $q(x, u)$ удовлетворяет условиям* i), ii) *теоремы* 1.1. *Тогда найдется такое число $K(T)$, что $\tilde{M} \subseteq M \subseteq \tilde{\tilde{M}}$, где*

$$\tilde{\tilde{M}} = \{u \in L_2(R^3): \|-\Delta u\|_2^2 + \|q(x, u) u\|_2^2 \leqslant K(T)\},$$

$$\tilde{M} = \{u \in L_2(R^3): 2(\|-\Delta u\|_2^2 + \|q(x, u) u\|_2^2) \leqslant T\}.$$

Доказательство левого включения непосредственно следует из неравенства треугольника.

Пусть $u \in M$. Тогда, как и при доказательстве леммы 1.1, имеем

$$\|u\|_{W_2^1(R^3)} + \|u\|_{C(R^3)} \leqslant c\|-\Delta u + q(x, u) u\|_2.$$

Следовательно,

$$\sup_{u \in M} \|u\|_{C(R^3)} \leqslant c \cdot T.$$

Далее, пользуясь условием ii), для любого $u \in M$ имеем

$$F^{-1}(c \cdot T) q(x, 0) \leqslant q(x, u(x)) \leqslant F(c \cdot T) q(x, 0). \tag{2.1}$$

В силу леммы 1.2 и соотношений (2.1) получаем

$$\|\tilde{q}(x) \tilde{L}^{-1}\|_2 \leqslant \|F(c \cdot T) q(x, 0) \tilde{L}^{-1}\|_2 \leqslant F(c \cdot T) \|q(x, 0) \tilde{L}_0^{-1}\|_2, \tag{2.2}$$

где $\tilde{L}^{-1}$, $\tilde{L}_0^{-1}$ — операторы, обратные операторам $\tilde{L} \equiv -\Delta + \tilde{q}(x_0)$, $\tilde{L}_0 \equiv -\Delta + F^{-1}(c \cdot T) q(x, 0)$ соответственно, $\tilde{q}(x) = q(x, u(x))$, $u(x) \in M$. Отсюда и из теоремы 1.1 непосредственным вычислением для всех $u \in M$ находим

$$\| q(x,\ u)\, u \|_2 \leqslant F_1(T). \tag{2.3}$$

Из неравенства (2.3) следует, что $\| -\Delta u \|_2 \leqslant \| -\Delta u + q(x,\ u)\, u\|_2 + \| q(x,\ u)\, u \|_2 \leqslant F_2(T)$, где $F_2(T) = T + F_1(T)$. Поэтому $\| -\Delta u \|_2^2 + \| q(x,\ u)\, u\|_2^2 \leqslant K(T)$ для всех $u \in M$, где $K(T) = 2F_2^2(T)$. Последняя оценка доказывает лемму 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть функция $q(x,\ u)$ удовлетворяет условиям* i), ii) *теоремы* 1.1. *Тогда $\tilde{\tilde{M}} \subseteq \tilde{\tilde{B}}$, где $\tilde{\tilde{B}} = \{u \in L_2(R^3) : \| -\Delta u\|_2^2 + \| q(x,\ 0)\, u\|_2^2 \leqslant K_1(T)\}$; $K_1(T)$ — положительное число, зависящее от T, здесь $K(T) < K_1(T)$.*

Доказательство. Можно убедиться, как и в предыдущем случае, что для всех $u \in \tilde{\tilde{M}}$ справедливо $\| u \|_{C(R^3)} \leqslant c \cdot K(T)$. Поэтому для всех $u \in M$ верно неравенство (2.1). Если теперь положить $K_1(T) = F^2(c \cdot K(T)) \cdot K(T)$, то нетрудно убедиться в справедливости леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть функция $q(x,\ u)$ удовлетворяет условиям* i), ii) *теоремы* 1.1. *Тогда $\tilde{D} = \{u \in L_2(R^3) : \| -\Delta u\|_2^2 + \| q(x,\ 0)\, u\|_2^2 \leqslant K_2(T)\} \subseteq \tilde{M}$, где $K_2(T)$ — положительное число, зависящее от T, такое, что $2K_2(T) \leqslant T$.*

Эта лемма доказывается точно так же, как и лемма 2.2.

Обозначим через $\tilde{d}_k$, d_k соответственно k-поперечник множества M и k-поперечник множества $B = \{u \in L_2(R^3) : \| -\Delta u\|_2^2 + \| q(x,\ 0)\, u\|_2^2 \leqslant 1\}$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* i), ii) *теоремы* 1.1. *Тогда $c^{-1} d_k \leqslant \tilde{d}_k < c d_k$, где c^{-1}, c зависят от T.*

Доказательство следует из свойств поперечников и лемм 2.1—2.3.

Из определения $N(\lambda)$ легко выводится

Лемма 2.5. *Пусть $\tilde{N}(\lambda)$ — количество $\tilde{d}_k$, больших $\lambda > 0$. Тогда $N(c \cdot \lambda) \leqslant \tilde{N}(\lambda) \leqslant N(c^{-1} \cdot \lambda)$.*

Теперь доказываемая теорема 2.1 следует из лемм 2.1 — 2.5 и теорем работы [9].

Пример. Возьмем $q(x,\ u) = |x| + |u| + 1$. Тогда в силу теоремы 2.1 для функции распределения поперечников множества $M = \{u \in W_2^1(R^3) : \| -\Delta u + q(x,\ u)\, u\|_2 \leqslant 1\}$ справедлива оценка $c^{-1} \lambda^{-9/2} \leqslant N(\lambda) \leqslant c \lambda^{-9/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Everitt W. H., Giertz M. Some properties of the domains certain differential operators // Proc. London Math. Soc.— 1971.— V. 23.— № 2.— P. 301—324.
2. Everitt W. H., Giertz M. Some inequalities associated with certain ordinary differential operators // Math. Z.— 1972.—V. 126.— № 4.— P. 308—326.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1973.— 576 с.
4. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R_n // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1983.— Т. 161.— С. 195—217.
5. Темам Р. Уравнение Навье — Стокса.— М.: Мир, 1981.— 408 с.
6. Бергибаев А., Муратбеков М. Б. Гладкость решений нелинейного стационарного уравнения Шрёдингера // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики.— Новосибирск, 1983.— С. 33—45.
7. Левитан Б. М., Отелбаев М. Об условиях самосопряженности операторов Шрёдингера и Дирака // Тр. Моск. матем. о-ва.— 1981.— Т. 42.— С. 142—159.
8. Коваленко В. Ф., Семенов Ю. А. Некоторые вопросы разложения по обобщенным собственным функциям оператора Шрёдингера с сильно сингулярными потенциалами // УМН.— 1978.— Т. 33.— № 4.— С. 16—19.
9. Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шрёдингера // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1979.— Т. 150.— С. 265—305.

г. Джамбул

Поступили
первый вариант 12.12.1984
окончательный вариант 12.05.1988