МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 29, № 6 (1981)

КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ РАСШИРЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЗАДАЧАМ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

М. Отелбаев

§ 1. Основная теорема. Пусть Ω — некоторое ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что граница $\partial\Omega$ множества Ω принадлежит классу C^∞. Пусть L_0 — замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, определенного на $C_0^\infty(\Omega)$ выражением

$$Lu = \sum_{i,\ j=\overline{1,\ n}} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + V^2(x)\, u. \tag{1}$$

Здесь $a_{ij}(x)$ — действительные, непрерывно дифференцируемые в Ω функции, $V(x) \geqslant 1$ непрерывна в Ω,

$$\sum_{i,\ j\geqslant 0} a_{ij}(x)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0, \qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x).$$

Обозначим через $\mathring{H}$ гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\sqrt{\langle L_0 u,\ u\rangle_{L_2(\Omega)}}$, а через H — гильбертово пространство, полученное пополнением множества всех тех бесконечно гладких в Ω функций, для которых конечна норма

$$\| u \|_H = \sqrt{\int_\Omega \left(\sum a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + V^2(x)\, | u(x) |^2 \right) \mathrm{d}x}\,. \tag{2}$$

Очевидно, $\mathring{H}$ непрерывно вложено в H.

Обозначим через $\mathscr{L}_D$ и $\mathscr{L}_N$ квадратичные формы

$$\mathscr{L}_D(u,\ g) = \langle u,\ g\rangle_{\mathring{H}}, \quad \mathscr{L}_N(u,\ g) = \langle u,\ g\rangle_H,$$

определенные на $\mathring{H}$ и на H соответственно. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathring{H}}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ — скалярные произведения в $\mathring{H}$ и H. Эти квадратичные формы замкнуты в $L_2(\Omega)$ и положительно определены. Поэтому им соответствуют самосопряженные в $L_2(\Omega)$ операторы L_D и L_N, которые являются (вообще говоря, различными) расширениями L_0 (см. [1, стр. 448—456]). Причем

$$D(\sqrt{L_D}) = \mathring{H}, \quad D(\sqrt{L_N}) = H,$$

$$\| \sqrt{L_D}\, u \|_{L_2(\Omega)} = \| u \|_{\mathring{H}} \text{ при } u \in \mathring{H},$$

$$\| \sqrt{L_N}\, u \|_{L_2(\Omega)} = \| u \|_H \text{ при } u \in H.$$

В частном случае, когда $Lu = -\Delta u + u$, Ω — круг, где Δ — оператор Лапласа, оператору L_D соответствует задача Дирихле

$$-\Delta u + u = f \in L_2(\Omega), \; u|_{\partial\Omega} = 0, \; u \in L_2(\Omega), \qquad (3)$$

и оператору L_N — задача Неймана

$$-\Delta u + u = f \in L_2(\Omega), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \in L_2(\Omega). \qquad (4)$$

В случае наличия вырождения, или если $V(x)$ в окрестности $\partial\Omega$ достаточно быстро растет, операторы L_D и L_N могут совпасть. В этой заметке мы укажем условия, обеспечивающие равенство $L_D = L_N$.

Если выражение (1) на $\partial\Omega$ сильно вырождается, то может оказаться, что оператор L_0 — самосопряженный. В этом случае, очевидно, $L_D = L_N$. Но из равенства $L_D = L_N$, вообще говоря, самосопряженность L_0 не вытекает.

На область Ω и на коэффициенты дифференциального выражения (1) наложим следующие условия «равномерности».

Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что через любую точку x, принадлежащую $\Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon$ проходит единственная нормаль к поверхности $\partial\Omega$; здесь

$$\partial(\Omega)_\varepsilon = \{x \colon \inf_{y \in \partial\Omega} |y - x| \leqslant \varepsilon\}$$

— замкнутая ε-окрестность множества $\partial\Omega$.

$$c^{-1} |\xi|^2 \leqslant \sum\nolimits_{i,j=\overline{1,n}} a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \leqslant c |\xi|^2$$

при $x \in \Omega$ и $x \notin (\partial\Omega)_{\varepsilon/2}$, (5)

$$c^{-1} g(\rho) |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\, j=\overline{1,\, n}} a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \leqslant c g(\rho) |\xi|^2$$

и

$$c^{-1} v_0(\rho) \leqslant V(x) \leqslant c v_0(\rho) \text{ при } x \in \Omega \cap (\partial\Omega)_\varepsilon, \tag{6}$$

где $g(\rho)$ и $v_0(\rho)$ — непрерывные в $[0, \varepsilon]$ функции, ρ — расстояние вдоль нормали к $\partial\Omega$ от точки x до $\partial\Omega$, $g(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq 0$ и $0 \leqslant g(\rho) \leqslant c$, $v_0(\rho) \geqslant c^{-1}$.

Условия (5), (6) означают, что в строго внутренней подобласти области Ω выражение (1) строго эллиптично, а на границе может вырождаться, но «равномерно». Всюду в дальнейшем считаем, что указанные выше условия выполнены. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Равенство $L_D = L_N$ имеет место в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\gamma \to 0} \left(\int_\gamma^\varepsilon g^{-2}(\rho)\, d\rho + \int_\gamma^\varepsilon v_0^2(\rho)\, d\rho \right) = \infty. \tag{7}$$

Для доказательства этой теоремы понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Равенство $\mathring{H} = H$ имеет место в том и только том случае, если выполнено* (7).

Эту лемму мы докажем ниже. А сейчас получим из этой леммы теорему. Если выполняется (7), то по лемме 1 имеет место равенство $\mathring{H} = H$. Поэтому квадратичные формы $\mathscr{L}_D$ и $\mathscr{L}_N$ совпадают и определяют один и тот же оператор, т. е. $L_D = L_N$. Обратно, если $L_D = L_N$, то $\sqrt{L_D} = \sqrt{L_N}$. Поэтому $\mathring{H} = D(\sqrt{L_D}) = D(\sqrt{L_N}) = H$. Теорема доказана.

2. Вспомогательные утверждения. Все дальнейшие выкладки и построения будут направлены на доказательство леммы 1. Условия (5), (6), наложенные на коэффициенты выражения (1), таковы, что доказательство леммы 1 можно свести к одномерному случаю. Поэтому ниже получим некоторые одномерные результаты, представляющие и самостоятельный интерес.

Пусть $\mathring{M}$ — пополнение множества $C_0^\infty [0, 1)$ бесконечно гладких функций, равных нулю в окрестности точки $x = 0$, по норме

$$\| u \|_{\mathring{M}} = \left(\int_0^1 (|\rho u'|^p + q |u|^p)\, dt \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{8}$$

где $\rho(t) > 0$, $q(t) \geqslant 1$ — непрерывные в $(0, 2)$ функции (возможно, $\rho(0) = 0$). Наряду с $\overset{\circ}{M}$ рассмотрим пополнение M множества $C^\infty[0, 1]$ бесконечно гладких на $[0, 1]$ функций, для которых $q(t) | u(t) |^p \in L_1(0, 1)$, по норме (8). Очевидно, $\overset{\circ}{M}$ непрерывно вложено в M. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Равенство* $M = \overset{\circ}{M}$ *имеет место, если и только если*

$$\int_0^1 q(t)\,dt + \int_0^1 \rho(t)^{-p'}\,dt = \infty \qquad (1/p + 1/p' = 1).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\int_0^1 q(t)\,dt + \int_0^1 \rho(t)^{-p'}\,dt < \infty. \tag{9}$$

Положим

$$u(t) = \int_t^1 \rho(x)^{-p'}\,dx.$$

В силу (9) эта функция ограничена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Поэтому

$$\int_0^1 |\rho(t)u'(t)|^p\,dt + \int_0^1 q(t)\,|u(t)|^p\,dt <$$
$$< c_1\left(\int_0^1 \rho(t)^{(1-p')p}\,dt + \int_0^1 q(t)\,dt\right) =$$
$$= c_{01}\left(\int_0^1 \rho(t)^{-p'}\,dt + \int_0^1 q(t)\,dt\right). \tag{10}$$

Отсюда и из (9) вытекает, что левая часть (10) конечна. Аппроксимируя функцию $\rho(t)^{-p'}$ в метрике $L_1(0, 1)$ гладкими функциями и используя конечность правой части (10), получаем, что $u(t)$ можно аппроксимировать в метрике (8) бесконечно гладкими функциями. Поэтому $u \in M$. Покажем, что $u(t) \notin \overset{\circ}{M}$. Для всякой функции $y(t) \in C_0^\infty[0, 1]$ имеем

$$|y(t)| = \left|\int_0^t |y'(\eta)|\,d\eta\right| \leqslant \int_0^t |y'(\eta)|\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^t \rho^{-p'}(\eta)\,d\eta\right)^{1/p'} \left(\int_0^t \rho^p(\eta)\,|y'(\eta)|^p\,d\eta\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^t \rho^{-p'}(\eta)\,d\eta\right)^{1/p'} \|y\|_{\overset{\circ}{M}}. \tag{11}$$

Это неравенство по непрерывности распространяется на все $y \in \overset{\circ}{M}$. Из (11) и (9) получаем, что $y(0) = 0$ для всех $y(t) \in \overset{\circ}{M}$. Для функции $u(t)$ это равенство не выполняется. Поэтому $u(t) \notin \overset{\circ}{M}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$\int_0^1 q(t)\,dt + \int_0^1 \rho(t)^{-p'}\,dt = \infty.$$

Возможны два случая

$$\int_0^1 q(t)\,dt < \infty \quad \text{или} \quad \int_0^1 q(t)\,dt = +\infty.$$

Если $\int_0^1 q(t)\,dt = +\infty$, то любая функция $u \in C^\infty[0, 1] \cap M$ обращается в нуль в точке $x = 0$. Заметим, что $\overline{C^\infty[0, 1] \cap M} = M$. Поэтому, если мы покажем, что любая функция $u \in C^\infty[0, 1] \cap M$, равная нулю в точке $x = 0$, принадлежит $\overset{\circ}{M}$, то равенство $\overset{\circ}{M} = M$ в случае $\int_0^1 q(t)dt = +\infty$ будет доказано. Пусть $u \in C^\infty[0, 1] \cap M$ и $u(0) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_\varepsilon = \delta$ такая, что

$$\int_0^\delta |\rho(x) u'(x)|^p\,dx + \int_0^\delta q(x)\,|u(x)|^p\,dx \leqslant \varepsilon^p. \qquad (12)$$

Можно считать, что $u'(x)$ и $u(x)$ в окрестности нуля неотрицательны. Выберем достаточно малое число $\delta_0 < \delta$ и положим

$$\tilde{\tilde{u}}'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{при } x \leqslant \delta_0, \\ -u'(x) & \text{при } x > \delta_0. \end{cases}$$

Число δ_0 можно выбрать таким малым, чтобы функция

$$\tilde{\tilde{u}}(x) = \int_0^x \tilde{\tilde{u}}'(t)\,dt$$

обращалась в нуль в некоторой точке $\delta_0 \leqslant \delta_1 < \delta$. Обозначим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \leqslant \delta_0 \\ \tilde{\tilde{u}}(x) & \text{при } \delta_0 \leqslant x \leqslant \delta_1, \\ 0 & \text{при } x > \delta_1. \end{cases}$$

В силу (12) и очевидных неравенств $|\tilde{u}| \leqslant |u|$, $|\tilde{u}'| \leqslant |u'|$ имеем, что

$$\tilde{u}(x) \in M \text{ и } \|\tilde{u}\|_M \leqslant \varepsilon, \qquad (13)$$

Введем функцию

$$v_\varepsilon(x)=\begin{cases} u(x)-\tilde u(x) & \text{при } x\geqslant\delta_0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant\delta_0.\end{cases}$$

Ясно, что эта функция принадлежит $\mathring{M}$. Из (12), (13) и определения v_ε получаем

$$\|v_\varepsilon-u\|_M=\Big(\int_0^\delta|v_\varepsilon'(t)-u'(t)|^p\rho^p(t)\,dt+$$
$$+\int_0^\delta q(t)\,|v_\varepsilon(t)-u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}\leqslant c\Big(\int_0^\delta|u'(t)|^p\rho^p(t)\,dt+$$
$$+\int_0^\delta q(t)\,|u(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}\leqslant c_1\varepsilon,$$

где c_1 не зависит от ε и δ. Отсюда вытекает, что $v_\varepsilon\xrightarrow{M}u$. Следовательно, $u\in\mathring{M}$. Поэтому $\mathring{M}=M$. Если $\int_0^1 q(t)\,dt<\infty$, то из условия теоремы вытекает, что

$$\int_0^1\rho^{-p'}(t)\,dt=\infty. \tag{14}$$

Пусть $u\in M\cap C^\infty[0,1]$ и $u(0)=0$, тогда повторяя рассуждения, использованные для доказательства равенства $\mathring{M}=M$ в случае $\int_0^1 q(t)\,dt=\infty$ получаем, что $u\in\mathring{M}$. Если $u\in M\cap C^\infty[0,1]$, то $v=u(0)-u\in M\cap C^\infty[0,1]$ и $v(0)=0$. Поэтому $v\in\mathring{M}$. Теперь достаточно доказать, что единица принадлежит $\mathring{M}$. Пусть $0<\varepsilon<A<1$. Обозначим

$$v_A(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\varepsilon,\\ \Big(\int_\varepsilon^A\rho^{-p'}(t)\,dt\Big)^{-1}\int_\varepsilon^x\rho^{-p'}(t)\,dt & \text{при } \varepsilon\leqslant x\leqslant A,\\ 1 & \text{при } A\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Имеем $v_A(x)\in\mathring{M}$. Оценим $\|1-v_A(x)\|_M$:

$$\|1-v_A(x)\|_M^p\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^A q(t)\,dt+\Big(\int_\varepsilon^A\rho^{-p'}(t)\,dt\Big)^{-p}\int_\varepsilon^A\rho^{-p'}(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_\varepsilon^A q(t)\,dt+\Big(\int_\varepsilon^A\rho^{-p'}(t)\,dt\Big)^{-p+1}. \tag{15}$$

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое наперед заданное число. Выберем в (15) число A из условия

$$\int_0^A q(t)\,dt < \delta.$$

Затем выберем ε таким малым, чтобы выполнялось условие

$$\left(\int_\varepsilon^A \rho^{-p'}(t)\,dt\right)^{-p+1} < \delta.$$

В силу (14) этот выбор возможен, так как $p > 1$. Из последних двух неравенств и (15) получаем

$$\| 1 - v_A(x) \|_M^p \leqslant 2\delta.$$

Отсюда, так как $v_A \in \dot{M}$ и $\delta > 0$ — любое число, вытекает, что $1 \in M$. Теорема доказана.

Пусть $\rho(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, 2]$ функция, $\rho(t) \neq 0$ при $t \neq 0$, а $q(t) \geqslant 1$ и непрерывна в $(0, 1)$. Обозначим через $\mathring{M}'$ пополнение множества бесконечно гладких на отрезке $[0, 1]$ функций, обращающихся в нуль в окрестности точки $x = 0$ по норме

$$\| u \|_{\mathring{M}} = \left(\int_0^1 (|(\rho u)_t'|^p + q(t)\,|u(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty. \quad (16)$$

Пусть M' — пополнение множества всех функций, для которых $\rho u \in C^\infty[0, 1]$ и конечна норма (16). Теорему 2 дополняет следующее

Следствие 1. *Равенство $\mathring{M}' = M'$ имеет место в том и только в том случае, если*

$$\int_0^1 \rho(t)^{-p} q(t)\,dt = +\infty.$$

Доказательство. Заменой $\rho u = v$ сводим доказательство к случаю $\rho(t) = 1$. Поэтому это утверждение вытекает из теоремы 2.

§ 3. Доказательство леммы 1. Докажем достаточность условия леммы. Пусть выполнены (5)—(7). Нужно доказать, что если $u \in H$, то $u \in \dot{H}$. Покроем Ω конечным числом открытых шаров U_l $(l = 1, 2, \ldots, k)$ и выберем бесконечно гладкие функции φ_j такие, что

$$\sup \varphi_l \subseteq U_l \text{ и } \sum_{l=1}^k \varphi_l^2 = 1. \quad (17)$$

Если $u \in H$, то $\varphi_l u \in H$. Кроме того, непосредственными вычислениями, учитывая (17) и равенство $\sum_{l=1}^{k} \varphi_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \varphi_l = 0$, получаем, что

$$\sum_{l=1}^{k} \| \varphi_l u \|_H^2 = \| u \|_H^2 + \\ + \int_\Omega \left[\sum_{l=1}^{k} \sum_{i,\, j=\overline{1, n}} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} a_{ij} \, | u |^2 \right] \mathrm{d}x. \quad (18)$$

Из условия (6) вытекает, что второе слагаемое правой части (18) допускает оценку через $\| u \|_{\mathrm{H}}^2$. Поэтому $\sum_{l=1}^{k} \| \varphi_l u \|_H^2 \leqslant c \, \| u \|_H^2$. Аналогичная оценка снизу очевидна. Таким образом,

$$c^{-1} \| u \|_H^2 \leqslant \sum_{l=1}^{k} \| \varphi_l u \|_H^2 \leqslant c \, \| u \|_H^2. \quad (19)$$

Из (19) следует, что достаточно доказать $\varphi_l u \in \overset{\circ}{H}$ ($l = 1, 2, \ldots, k$). Если $U_l \cap \partial\Omega = \varnothing$, то $\varphi_l u \in \overset{\circ}{H}$. Если же $U_l \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, то можно считать, что $U_l \subseteq (\partial\Omega)_{\varepsilon/2}$. Из $\varphi_l u \in H$ в силу (6) получаем

$$\int_{U_l} \left(g(\rho) \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi_l u) \right|^2 + v_0(\rho) \, | \varphi_l u |^2 \right) \mathrm{d}x < \infty.$$

Переходя к локальным координатам, одна из которых есть расстояние вдоль нормали к $\partial\Omega$, будем иметь

$$\int_{\widetilde{U}_l} g(\rho) \left(\sum_{i=2}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \varphi_l u \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_l u}{\partial \rho} \right|^2 \right) + \\ + v_0(\rho) \, | \varphi_l u |^2 \, \mathrm{d}\tilde{x} < \infty, \quad (20)$$

где $\widetilde{U}_l$ — образ, U_l, $\tilde{x} = (\rho, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ — новые координаты. Продолжим $g(\rho)$ и $v_0(\rho)$, полагая их при $\rho > (3/4)\varepsilon$ постоянными, отличными от нуля. Сделаем теперь преобразование Фурье по переменным $(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. Тогда из (20) получим, что эту часть доказательства леммы 1 достаточно доказать в одномерном случае. Поэтому из теоремы 2 получаем достаточность условия леммы 1.

Необходимость. Пусть $x_0 \in \partial\Omega$. Возьмем функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ с носителем в шаре $S_\varepsilon(x_0) = \{x \colon | x - x_0 | \leqslant \varepsilon/2\}$ такую, что $\varphi(t) \equiv 1$ при $t \in \{x \colon | x - x_0 | \leqslant \varepsilon/4\}$. Предположим, что $\overset{\circ}{H} = H$ и выполнены (5), (6).

Нужно показать, что выполняется (7). Если $u(x) \in H$, то $\varphi(x)\, u(x) \in H$. Поэтому, так как $\overset{\circ}{H} = H$, имеем, что $\varphi(x)\, u(x) \in \overset{\circ}{H}$. Перейдем в $S_\varepsilon(x_0)$ к локальным координатам $\tilde{x}$, в которых за $\tilde{x}_1$ берется расстояние от точки x до $\partial\Omega$ вдоль нормали к $\partial\Omega$. Положим

$$u(x) = \tilde{u}(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}_1}^{\varepsilon} \rho(\tilde{x}_1)^{-1/p'}\, d\tilde{x}_1.$$

Очевидно, $\tilde{\varphi}(\tilde{x})\, \tilde{u}(\tilde{x}) = \varphi(x)\, u(x) \in \overset{\circ}{H}$, где $\tilde{u}(\tilde{x})$ и $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ — функции $\varphi(x)$ и $u(\tilde{x})$ соответственно, в новых координатах. Учитывая, что $\tilde{u}(\tilde{x})$ зависит только от одного переменного, а $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ — непрерывно дифференцируема, и рассуждая далее, как в одномерном случае (см. доказательство теоремы 2, необходимость), используя (6), получим, что (7) выполняется. Лемма доказана.

Институт математики
и механики АН Каз.ССР

Поступило
5.VI.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, М., «Мир», 1977.