МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 14, № 6 (1973), 843—852

УДК 517.9

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

М. Отелбаев

В работе изучается система Дирака на оси $(-\infty, \infty)$. Получены асимптотические формулы распределения как для положительных, так и для отрицательных собственных чисел. Асимптотические формулы, установленные теоремой 1, существенно отличаются от формул, полученных Саргосяном [1], и дают возможность писать асимптотические формулы для распределения положительных (отрицательных) собственных чисел также в тех случаях, когда отрицательный (положительный) спектр непрерывен, если выполнены соответствующие условия на потенциал. Библ. 5 назв.

1. Обозначим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_3(x) \\ a_3(x) & a_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}(x) = -\begin{pmatrix} a_2(x) & a_3(x) \\ a_3(x) & a_1(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ — действительные достаточно гладкие функции, определенные на действительной оси $J = (-\infty, \infty)$.

Пусть L — замыкание в пространстве $H = L_2(J) \oplus L_2(J)$ дифференциального выражения, заданного равенством

$$Lu = \left(B\frac{d}{dx} + Q(x)\right)u, \quad u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \quad (x \in J) \tag{2}$$

на $H_0 = C_0^\infty(J) \oplus C_0^\infty(J)$. Известно (см. [2], стр. 633), что L — самосопряженный оператор. Ниже приведены ограничения, которые будем накладывать на $Q(x)$:

а) $$(\lambda_1(x) - \alpha_0)(\lambda_2(x) + \alpha_0) < -1, \tag{3}$$

где $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ — собственные числа матрицы $Q(x)$, занумерованные в порядке возрастания, $\alpha_0 \in (0, \infty)$,

б) $$m(x) = \sup_{|x-y| \leqslant 100} \sum_{i=1}^{3} \frac{|a_i(x) - a_i(y)|}{f(|x-y|)} < 1 + \min(\lambda_1(x), \lambda_2(x)), \tag{4}$$

где $f(t)$ — непрерывная на $[0, 100]$ функция такая, что

$$f(0) = 0,\ f'(0) > 0,\ f(t) > 0 \text{ при } t > 0.$$

Если при данном n ($n = 1$ или 2) выполнено равенство $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (-1)^n \lambda_n(x) = +\infty$, то при соответствующем n можно определить непрерывную монотонную функцию $M_n(\lambda)$:

$$M_n(\lambda) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda \geqslant (-1)^n \lambda_n(x)} \sqrt{(\lambda - (-1)^n \lambda_1(x))(\lambda - (-1)^n \lambda_2(x))}\, dx. \tag{5}$$

Через $N(a, b)$ будем обозначать количество точек спектра оператора L на отрезке $[a, b]$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (4), *тогда*

1. *Если* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} = +\infty$ *и выполнены условия*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} M_2^{-1}(\lambda) \int_{\lambda \geqslant \lambda_2(x)} dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{\lambda \to +\infty} \frac{M_2(\lambda(1+\varepsilon))}{M_2(\lambda)}, \tag{6}$$

то непрерывный спектр ограничен сверху и

$$N(b_2, \lambda) = M_2(\lambda)(1 + o(1))\ (\lambda \to +\infty;\ b_2 \in (0, +\infty)). \tag{*}$$

2. *Если* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \lambda_1(x) = +\infty$ *и выполнены условия*

$$\lim_{\lambda \to 0} M_1^{-1}(\lambda) \int_{\lambda \geqslant -\lambda_1(x)} dx, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{\lambda \to +\infty} \frac{M_1(\lambda(1+\varepsilon))}{M_1(\lambda)} = 1,$$

то непрерывный спектр ограничен снизу и

$$N(-\lambda, b_1) = M_1(\lambda)(1 + o(1))\ (\lambda \to +\infty;\ b_1 \in (-\infty, 0)). \tag{**}$$

Доказательство этой теоремы опирается на ряд лемм, в частности на лемму 6 (см. ниже), которая является усилением «принципа расщепления» из работ [3] и [4]. В [1] была получена асимптотическая формула как для $N(0, \lambda)$, так и для $N(-\lambda, 0)$. При тех ограничениях, которые накладывал И. С. Саргсян [1] на $Q(x)$, оказалось, что $N(0, \lambda) \sim N(-\lambda, 0)$ $(\lambda \to +\infty)$. Из теоремы 1 видно, что последнее соотношение не обязательно выполняется даже тогда, когда $Q(x)$ удовлетворяет довольно жестким требованиям.

Пусть $a_2(x) \equiv a_3(x) \equiv 0$, и пусть $a_1(x)$ — бесконечно гладкая функция такая, что $a_1(x) = |x|$ при $|x| \geqslant 1$. В этом случае из результатов работы [4] вытекает, что для достаточно больших λ выполнено равенство $N(-\lambda, 0) \equiv \equiv +\infty$, поэтому формулы Саргсяна теряют смысл, но из первого утверждения теоремы 1 получаем, что непрерывный спектр оператора ограничен сверху и

$$N(b_2, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\pi}\left[\int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt + o(1)\right] \quad (\lambda \to +\infty;\ b_2 \in (0, +\infty)).$$

2. В этом пункте докажем некоторые леммы и неравенства.

ЛЕММА 1. *Если λ — собственное число оператора L, то $-\lambda$ — суть собственное число аналогичного оператора $\widetilde{L}$:*

$$\widetilde{L}y = \left(B\frac{d}{dx} + \widetilde{Q}(x)\right)y.$$

Доказательство. Пусть

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{y}(x) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \qquad Ly = \lambda y.$$

Непосредственной подстановкой получаем $\widetilde{L}\widetilde{y} = -\lambda\widetilde{y}$. Это и доказывает лемму.

Если T — линейный оператор с областью определения $D(T)$, то через $F[\lambda, T]$ обозначим максимальную размерность линейных многообразий $G \subseteq D(T)$, для которых

$$\|Ty\|^2 < \lambda^2\|y\|^2 \quad (y \in G;\ y \neq 0). \qquad (7)$$

В случае, когда T — самосопряженный оператор, через $N[a, b, T]$ обозначим количество точек спектра оператора T в интервале (a, b). В этом случае (см. [5], стр. 277) имеем

$$N[-\lambda, \lambda, T] = F[\lambda, T]. \qquad (8)$$

ЛЕММА 2. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $s > 0$, *и пусть* T *и* M — *самосопряженные операторы*, $\|M\| < s$, *тогда*

$$N[a, b, T] \leqslant N[a-s, b+s, T+M].$$

Эта лемма общеизвестна и тривиальна.

Если Δ — отрезок, то через $B(\Delta)$ обозначим замыкание в пространстве $H(\Delta) = L_2(\Delta) \oplus L_2(\Delta)$ дифференциального выражения (2), заданного на $H_0^\infty(\Delta) = C_0^\infty(\Delta) \oplus \oplus C_0^\infty(\Delta)$, а через $L(\Delta)$ — некоторое самосопряженное расширение оператора $B(\Delta)$. Пусть $0 < \gamma \leqslant 1$, $100 \leqslant \leqslant l < +\infty$, $\eta = (l\gamma^{-1})^{10}$. Обозначим

$$\Delta_{j1} = \left[\gamma j - \frac{\gamma}{2l}, \gamma j + \gamma + \frac{\gamma}{2l}\right], \quad \Delta_{j2} = \left[\gamma j - \frac{\gamma}{l}, \gamma j + \frac{\gamma}{l}\right]$$
$$(j = 0, \pm 1, \ldots). \tag{9}$$

Выберем действительные функции $\varphi_{ji}(x)$ с носителями соответственно в Δ_{ji} $(i = 1,2;\ j = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ такие, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \varphi_{ji}^2(x) \equiv 1,$$

$$\sup_{x \in J} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} |\varphi_{ji}^{(m)}(x)|^2 < \eta - 1. \tag{10}$$

ЛЕММА 3. *Если* $y \in D(L)$, *то* $\varphi_{ji}\, y \in D(B(\Delta_{ji}))$ $(i = 1,2;\ j = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$, *и для любого* $s \in J$ *верно равенство*

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \| B(\Delta_{ji}) \varphi_{ji} y - s \varphi_{ji} y \|_{H(\Delta_{ji})}^2 =$$
$$= \| Ly - sy \|_H^2 + \left\| \sum_{i=1}^{2} \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_{ji}'|^2 y} \right\|_H^2.$$

Утверждение этой леммы при $y(x) \in H_0^\infty(J)$ получается непосредственным вычислением, что и доказывает лемму, так как L является замыканием своего сужения на $H_0^\infty(J)$.

ЛЕММА 4. *Пусть* $H_0, H_1, \ldots, H_m$ $(m < +\infty)$ — *некоторые гильбертовы пространства*, P_n $(n = 1, \ldots, m)$ — *линейные ограниченные преобразования из* H_n *в* H_0, *а* A_n $(n = 0, 1, \ldots, m)$ — *линейные самосопряженные операторы в* H_n. *Предположим, что для всякого* $y \in D(A_0)$ *выполнены* *условия:*

$$P_n y \in D(A_n) \quad (n = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{n=1}^{m} \| P_n y \|^2_{H_n} \geqslant \| y \|^2_{H_0},$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} \| A_n P_n y \|^2_{H_n}} < \| A_0 y \|_{H_0} + \alpha \| y \|_{H_0} \qquad (\alpha > 0),$$

тогда при $\lambda > \alpha$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{m} N[-\lambda, \lambda, A_n] > N[-\lambda + \alpha, \lambda - \alpha, A_0].$$

Доказательство. Пусть $E_\lambda^{(n)}$ — семейство пространств в пространстве H_n ($n = 0, 1, \ldots, m$), соответствующее спектральному разложению оператора A_n. Предположим, утверждение леммы неверно. Тогда для некоторого числа μ, $\mu > \alpha$ в силу теоремы 1 из [5] (см. стр. 277) получаем

$$m_1 = \sum_{n=1}^{m} \dim (E_\mu^{(n)} - E_{-\mu}^{(n)}) H_n < \\ < \dim (E_{\mu+\alpha}^{(0)} - E_{-\mu-\alpha}^{(0)}) H_0 = m_2. \qquad (11)$$

Покажем, что в H_0 можно найти вектор y_0 такой, что

$$y_0 \neq 0, \; P_n y_0 \perp (E_\mu^{(n)} - E_{-\mu}^{(n)}) H_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12)$$
$$y_0 \in (E_\mu^{(0)} - E_{-\mu}^{(0)}) H_0.$$

Действительно, последнее условие эквивалентно условию существования нетривиального решения системы m_1 — линейных однородных уравнений с m_2 неизвестными. Поэтому, так как $m_2 > m_1$, то существование y_0 доказано. Далее из свойств спектрального разложения, условия доказываемой леммы и (12) получаем

$$(\mu - \alpha) \| y_0 \|_{H_0} \geqslant \| A_0 y_0 \|_{H_0} \geqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \| A_n P_n y_0 \|^2_{H_n}} - \alpha \| y \|_{H_0} > \\ > \mu \sqrt{\sum_{n=1}^{m} \| P_n y_0 \|^2_{H_n}} - \alpha \| y_0 \|_{H_0} \geqslant (\mu - \alpha) \| y_0 \|_{H_0},$$

т. е. $\mu - \alpha > \mu - \alpha$. Это противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 5. *Пусть* λ, $s \in J$, E — *единичный оператор и* Δ — *произвольный отрезок, тогда верны неравенства*

$$\max_{i=1,2} \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} F[\lambda, B(\Delta_{ji}) - sE] \leqslant F[\lambda, L - sE], \tag{13}$$

$$\max(0, F[\lambda, L(\Delta) - sE]) \leqslant F[\lambda, B(\Delta) - sE]. \tag{14}$$

Неравенство (13) очевидно. Докажем (14). Пусть G — линейное многообразие, удовлетворяющее (7) при $T = L(\Delta) - sE$. Так как элементы матрицы $Q(x)$ гладкие, то G состоит также из гладких вектор-функций. Кроме того, если $y(x)$ — гладкая вектор-функция и удовлетворяет условиям

$$y(\Delta^+) = y(\Delta^-) = y'(\Delta^+) = y'(\Delta^-) = 0, \tag{15}$$

где Δ^+ и Δ^- здесь и далее означают соответственно правый и левый концы отрезка Δ, то $y(x) \in D(B(\Delta))$ и $L(\Delta)y = B(\Delta)y$. Следовательно, достаточно показать, что если $k = \dim G \geqslant 9$, то в G можно выбрать базис такой, что первые $k - 9$ векторов удовлетворяют (15). Из первых девяти векторов базиса можно выбрать ненулевой вектор, удовлетворяющий условию (15), так как условие возможности такого выбора эквивалентно условию существования нетривиального решения системы восьми линейных однородных уровней с девятью неизвестными. Поэтому в G можно выбрать базис $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots, v_k(x)$ такой, что $v_1(x)$ удовлетворяет (15). Далее, если $k \geqslant 10$, то, оставляя $v_1(x)$ прежним из линейных комбинаций $v_2(x), v_3(x), \ldots \ldots, v_{10}(x)$, можно выбрать вектор $u(x)$, удовлетворяющий условию (15). Следовательно, в G можно выбрать базис, в котором первые два базисных вектора удовлетворяют (15). Продолжая этот процесс по индукции, получаем, что в G можно выбрать такой базис, что первые $k - 9$ базисных векторов удовлетворяют (15). Тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 6. *При* $\lambda > \eta = (l\gamma^{-1})^{10}$ *выполнены неравенства*

$$\sum\nolimits_{i=1}^{2} \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} N[\mu_0, \mu_0 + 2\lambda, L(\Delta_{ji})] \geqslant$$
$$\geqslant N[\mu_0 + \eta, \mu_0 + 2\lambda - \eta, L],$$

$$N[\mu_0, \mu_0 + 2\lambda, L] \geqslant \max_{i=1,2} \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} [N[\mu_0, \mu + 2\lambda, L(\Delta_{ji})] - 9[,$$

где μ_0 — любое число, а $[d]$ — здесь и далее означает целую часть числа d, если $d \geqslant 0$, и равно нулю, если $d \leqslant 0$.

Доказательство. Заметим, что $N[a, b, L(\Delta) - sE] = N[a+s, b+s, L(\Delta)]$, поэтому второе неравенство следует из (8) и леммы 5 при соответствующем выборе параметров. Докажем первое неравенство. В лемме 3 вместо $B(\Delta)$ можно взять $L(\Delta)$, так как $L(\Delta)$ — самосопряженное расширение оператора $B(\Delta)$. Если положим $H_0 = H(J)$, $A_0 = L - sE$, за P_n, H_n, A_n $(n = 1,2,\ldots)$ берем соответственно операторы умножения $\varphi_{ji}(x)$, пространства $H(\Delta_{ji})$ и операторы $L(\Delta_{ji}) - sE$ $(i = 1,2;$ $j = 0, \pm 1,\ldots)$, то мы видим, что в силу леммы 3 все условия леммы 4 выполняются при $\alpha = \eta$, поэтому получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} N[-\lambda, \lambda, L(\Delta_{ji}) - sE] \geqslant \geqslant N[-\lambda + \eta, \lambda - \eta, L - sE].$$

Отсюда, если положить $s = \mu_0 + \lambda$, получится левое неравенство доказываемой леммы. Лемма доказана.

3. В силу леммы 1 теорема 1 будет доказана, если докажем первое утверждение теоремы 1. Предположим, что выполнены (4), (6) и условие

$$\lambda_1(x) < -c \leqslant -1, \quad \lambda_2(x) > c \geqslant 1, \quad c \neq +\infty. \tag{16}$$

Пусть $x_j \in \Delta_j = [j\gamma - 10\gamma,\ j\gamma + 10\gamma]$ $(j = 0, \pm 1,\ldots)$. Обозначим

$$a_{ji} = a_i(x_j) \quad (i = 1, 2), \quad p_j = \lambda_1(x_j),$$

$$r_j = \lambda_2(x_j), \quad A_j = Q(x_j),$$

$$N_j = \begin{pmatrix} p_j & 0 \\ 0 & r_j \end{pmatrix}, \quad R^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_j = \sup_{x_j \in \Delta_j} \sum_{i=1}^{3} |a_i(x) - a_{ji}|. \tag{17}$$

Так как A_j — самосопряженная матрица, а N_j — его диагональное представление, то существует ортогональное преобразование T_j, такое, что $T_j^* A_j T_j = N_j$. Обозначим через T_{ji} $(j = 0, \pm 1,\ldots;\ i = 1,2)$ оператор в пространстве $H(\Delta_{ji})$, порожденный равенством $T_{ji}\ y = (B \frac{d}{dx} + A_j)\ y$

и граничными условиями:

$$R^+ (T_j y)(\Delta_{ji}^+) = 0,\ (E - R^+)(T_j y)(\Delta_{ji}^-) = 0. \qquad (18)$$

Пусть здесь и далее $\gamma_1 = \gamma - l^{-1}\gamma$, $\gamma_2 = 2\gamma l^{-1}$, тогда собственные числа оператора T_{ji} вычисляются по формулам

$$\lambda_k (T_{ji}) = \frac{1}{2}(p_j + r_j + (2k-1)\sqrt{\left(\frac{p_j - r_j}{2k-1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\gamma_i}\right)^2}) \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \qquad (19)$$

За $L(\Delta_{ji})$ выберем самосопряженные расширения оператора $B(\Delta_{ji})$, соответствующие (18). Из лемм 2 и 6 получим

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} N[-M_j, 2\lambda + M_j, T_{ji}] \geqslant N[\eta, 2\lambda - \eta, L], \qquad (20)$$

$$N[0, 2\lambda, L] \geqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} [N[M_j, 2\lambda - M_j, T_{j1}] - 9]. \qquad (21)$$

Из условий (4), (16) вытекают неравенства

$$M_j \leqslant 2 \min (c, |p_j|, |r_j|) \cdot f(20\gamma) \quad (j = 0, \pm 1, \ldots). \qquad (22)$$

Возьмем γ настолько малым, чтобы иметь $f(20\gamma) < 0{,}25$. Тогда из (19) и (22) следует, что $\lambda_k (T_{ji}) < p_j < -M_j$, если $k \leqslant 0$, и $\lambda_k (T_{ji}) > r_j > M_j$, если $k \geqslant 1$. Отсюда и из (19) легко получить, что если $a < \mu$, $a \geqslant -M_j$, $\mu \geqslant -M_j$, то

$$N[a, \mu, T_{ji}] = \left[\operatorname{Re} \frac{\gamma_i}{\pi} \sqrt{(\mu - r_j)(\mu - p_j)} + \frac{1}{2}\right] \quad (j = 0, \pm 1, \ldots;\ i = 1, 2).$$

В силу (22), (4) и последнего равенства, обозначив $\beta = 1 + 10 f(20\gamma)$, усиливая неравенства (20), (21), получим

$$N[\eta, 2\lambda - \eta, L] \leqslant \qquad (23)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \frac{\gamma_i}{\pi} \sum_{(2\lambda+1)\beta \geqslant r_j} (\sqrt{(2\lambda\beta + \beta - r_j)(2\lambda\beta + \beta - p_j)} + 1),$$

$$N[0, 2\lambda, L] \geqslant \qquad (24)$$
$$\geqslant \frac{\gamma_1}{\pi} \sum_{(2\lambda-1)\beta^{-1} \geqslant r_j} (\sqrt{[(2\lambda - 1)\beta^{-1} - r_j][(2\lambda - 1)\beta^{-1} - p_j]} + 1).$$

Так как x_j — любая точка в Δ_j, то в (23) и (24) суммы можно заменить интегралами. Тогда в обозначениях теоремы 1 имеем

$$N(\eta, 2\lambda - \eta) \leqslant \left(1 + \frac{d}{l}\right)\left[M_2(2\lambda\beta + \beta) + F\int_{2\lambda\beta+\beta \geqslant r(x)} dx\right], \tag{25}$$

$$N(0, 2\lambda) \geqslant \left(1 - \frac{d}{l}\right)\left[M_2(2\lambda\beta + \beta) + F\int_{2\lambda\beta^{-1}-\beta^{-1} \geqslant r(x)} dx\right], \tag{26}$$

где d — абсолютная постоянная, F зависит только от l и γ и $F \neq +\infty$ при $\gamma l^{-1} \neq 0$.

4. Доказательство теоремы. Из (25) вытекает, что непрерывный спектр ограничен сверху. Кроме того, легко видеть, что если в условии (16) c больше, чем некоторое фиксированное число (точное значение которого нам не важно), то непрерывный спектр будет сверху ограничен числом -1. Предположим теперь, что формула $(*)$ неверна, тогда существуют последовательность $\{t_n\}$ $(t_n \to +\infty)$ и число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$M_2(t_n)\, N^{-1}(0, \ t_n) \overline{\in} (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon). \tag{27}$$

Поделим (25) на $M_2(2\lambda - \eta)$, а (26) на $M_2(2\lambda)$ получено и, устремляя λ к $+\infty$, в силу условия (6) получим

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{N(0, 2\lambda - \eta)}{M_2(2\lambda - \eta)} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{N(\eta, 2\lambda - \eta)}{M_2(2\lambda - \eta)} \leqslant \left(1 + \frac{d}{l}\right)(1 + q(\gamma)),$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{N(0, 2\lambda)}{M_2(2\lambda)} \geqslant \left(1 - \frac{d}{l}\right)(1 - q(\gamma)),$$

где $q(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to 0$.

Если в этих неравенствах взять l^{-1} и γ достаточно малыми, то получим противоречие с (27), поэтому первое утверждение теоремы 1 доказано, если вместо условия (3) выполняется (16) при достаточно большом c. Если $Q(x)$ не удовлетворяет условию (16), а удовлетворяет условиям (3), (4), (6), то можно $Q(x)$ представить в виде $Q(x) = Q_0(x) + Q_1(x)$, где $Q_0(x)$ удовлетворяет условиям (16), (4), (6), а $\sup\limits_{x\in J} \| Q_1(x) \| < +\infty$.

Обозначим

$$L^{(0)} = B\frac{d}{dx} + Q_0(x);$$

из формулы (*) и условия (6) следует, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N\,[0,\,\lambda+1,\,L^{(0)}]\,N^{-1}\,[0,\,\lambda,\,L^{(0)}]=1.$$

Отсюда и из леммы 2 легко следует первое утверждение теоремы 1. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит Р. С. Исмагилова и Б. М. Левитана за ценные указания и внимание к работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.III.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Саргсян И. С., Докторская дисс., МГУ, 1969.
[2] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970.
[3] Исмагилов Р. С., Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов, Докл. АН СССР, **140** (1961), 33—36.
[4] Исмагилов Р. С., Мартынов В. В., Критерий дискретности спектра самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка с медленно меняющимися коэффициентами, Докл. АН СССР, **167**, № 6 (1966), 1223—1225.
[5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966.