МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 3 (1979)

ОЦЕНКИ s-ЧИСЕЛ И УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

М. Отелбаев

В настоящей заметке для несамосопряженного оператора Штурма — Лиувилля, рассматриваемого в $L_2(\Omega)$, где Ω — открытое множество в $I = (-\infty, \infty)$, получены: а) двусторонние оценки s-чисел, б) теоремы о полноте корневых векторов.

§ 1. Оценки s-чисел. Обозначим через L замыкание оператора L_0, определенного на $C^\infty(\Omega)$ равенством

$$L_0 y = -y'' + q(x) y, \tag{1}$$

где Ω — открытое подмножество прямой $I = (-\infty, \infty)$, $C^\infty(\Omega)$ — множество финитных бесконечно гладких функций, равных нулю на концах интервалов (конечных или бесконечных), объединением которых является множество Ω, $q(x)$ — комплекснозначная локально непрерывная в Ω функция.

В этом пункте будем предполагать, что функция $\operatorname{Im} q(x)$ — полуограничена, $\operatorname{Re} q(x)$ — полуограничена снизу. Для наших целей, не ограничивая общности, можно считать

$$\operatorname{Re} q(x) \geqslant 1, \quad \operatorname{Im} q(x) \geqslant 0. \tag{2}$$

Из этого условия и результатов Лидского [1] следует, что оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1}.

Для удобства будем считать, что $|q(x)| = \infty$ вне Ω и через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначим различные постоянные.

Введем функцию

$$q^*(x) = \inf_{d>0} \left\{ d^{-1}:\ d^{-1} \geqslant 2\pi \int_{x-d}^{x+d} |q(t)|\, dt \right\}, \qquad x \in \Omega.$$

При $x \notin \Omega$ полагаем $q^*(x) = +\infty$.

Определение [2, стр. 120]. Вполне непрерывный оператор A принадлежит σ_p или имеет тип p, если

$$\| A \|_{\sigma_p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^p(A) < \infty, \tag{3}$$

где $S_n(A)$ — так называемые s-числа оператора A, т. е. собственные числа оператора $(A^*A)^{1/2}$.

Числа $S_n^{-1}(L^{-1})$ будем называть s-числами оператора L. Через $N(\lambda)$ обозначим количество s-чисел оператора L, не превосходящих λ.

В работе [1] В. Б. Лидский получил критерий полной непрерывности оператора L^{-1} и тем самым обобщил известный критерий А. М. Молчанова [3] на несамосопряженный случай, а в [4] — [5] было получено необходимое и достаточное условие конечности типа оператора L^{-1}.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполняются* (2). *Тогда, если* $\lambda > 0$, *то*

$$c^{-1}\lambda^{1/2}\mu\,(x \in \Omega:\ q^*(x) \leqslant c^{-1}\lambda^{1/2}) \leqslant N(\lambda) \leqslant \leqslant c\lambda^{1/2}\,\mu\,(x \in \Omega:\ q^*(x) \leqslant c\lambda^{1/2}),$$

где $\mu(\cdot)$ — *мера Лебега.*

Эта теорема обобщает [6, теорема 1] на несамосопряженный случай.

Доказательство. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$q^{**}(x) = \inf_{d>0} \left(d^{-1} + \int_{x-d}^{x+d} |q(t)|\, dt \right),$$

тогда

$$c^{-1} \leqslant q^{**}(x) \cdot q^{*-1}(x) \leqslant c.$$

Эта лемма легко следует из определений $q^{**}(x)$ и $q^*(x)$.

В [5] показано, что $N(\lambda)$ не превосходит $\tilde{N}(c_1 \cdot \lambda)$, где $\tilde{N}(\cdot)$ — функция распределения собственных чисел самосопряженного оператора, аналогичного L, соответствующего потенциалу $|q(x)|$. Поэтому из теоремы 1 работы [6] и леммы 1 получаем

$$N(\lambda) \leqslant c\lambda^{1/2}\mu\,(x \in \Omega:\ q^*(x) \leqslant c\lambda^{1/2}). \tag{4}$$

n-ое s-число оператора L совпадает с корнем квадратным n-го собственного числа оператора L^*L. Поэтому из теоремы Глазмана [7, стр. 277] получаем, что $N(\lambda)$ не меньше максимальной размерности подпространства, на котором

$$\lambda^2 \| u \|^2 \geqslant \langle L^*Lu,\ u\rangle = \| Lu \|^2. \tag{5}$$

Из определения $q^*(x)$ вытекает, что для произвольного $\lambda > 0$ существует, по крайней мере, $k_\lambda = c_2^{-1}\lambda^{1/2}\mu\,(x \in \Omega\colon q^*(x) \leqslant \lambda^{1/2})$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_{k_\lambda}$ длины $2\lambda^{-1/2}$, содержащихся в Ω и таких, что

$$2\pi \int_{\Delta_n} |q(t)|\,dt \leqslant \lambda^{1/2}. \tag{6}$$

Пусть $y_n(x)$ — решение уравнения $-y'' + q(x)y = 0$, удовлетворяющее условиям $y(\Delta_n^-) = 1$, $y'(\Delta_n^-) = 0$, где Δ_n^- — левый конец интервала Δ_n. Имеем

$$y_n(x) = 1 + \int_{\Delta_n^-}^{x} \left(\int_{\Delta_n^-}^{t} y_n(\eta)\,q(\eta)\,d\eta\right) dt. \tag{7}$$

Отсюда, обозначив $m_n = \sup\{|y(x)|\colon x \in \Delta_n\}$ в силу (6) будем иметь

$$m_n \leqslant 1 + m_n 2\lambda^{-1/2} \int_{\Delta_n} |q(t)|\,dt \leqslant m_n/\pi + 1$$

или $m_n \leqslant \pi(\pi - 1)^{-1}$. Последнее неравенство, (6) и (7) дают

$$|y_n(x) - 1| \leqslant \pi(\pi - 1)^{-1}\cdot 2\lambda^{-1/2} \int_{\Delta_n} |q(t)|\,dt \leqslant (\pi - 1)^{-1}.$$

Следовательно,

$$1/4 \leqslant |y_n(x)| \leqslant 4 \text{ при } x \in \Delta_n. \tag{8}$$

Продифференцируем (7) и на основании (6) и (8) легко получаем

$$|y_n'(x)| \leqslant c\lambda^{1/2} \text{ при } x \in \Delta_n. \tag{9}$$

Через L_λ обозначим подпространство, натянутое на функцию

$$\varphi_n(x) = \omega((x - \tilde{\Delta}_n)/\lambda^{-1/2})\, y_n(x),\ n = 1, 2, \ldots, k_\lambda,$$

где $\tilde{\Delta}_n$ — центр интервала Δ_n, $\omega(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ и $\omega(x) \equiv 1$ на $[-1/2, 1/2]$. Очевидно,

$$\langle L\varphi_n, L\varphi_m\rangle = 0,\quad \langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = 0 \text{ при } m \neq n;$$
$$m, n = 1, 2, \ldots, k_\lambda. \tag{10}$$

В силу (8) и (9) имеем

$$\| L\varphi_n \|^2 = \| \lambda\omega''((x-\widetilde{\Delta}_n)/\lambda^{-1/2})\, y_n + \\ + \lambda^{1/2}\omega'((x-\widetilde{\Delta}_n)/\lambda^{-1/2})\, y_n' \|^2 = c_3\lambda^2 \int_{\Delta_n} dt \leqslant \\ \leqslant c_4\lambda^2 \int_{\Delta_n} | \varphi_n(x) |^2 \, dx.$$

Эти неравенства вместе с (10) показывают, что на L_λ выполняется (5), в котором λ^2 следует заменить на $c_4\lambda^2$. Поэтому

$$N(c_5\lambda) \geqslant c_5^{-1}\lambda^{1/2}\mu\,(x \in \Omega\colon\ q^*(x) \leqslant \lambda^{1/2}).$$

Это неравенство и (4) доказывают теорему 1.

Из теоремы 1, как в [6], получаем

Следствие 1. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда*

а) *оператор* L^{-1} *принадлежит* σ_p *в том и только в том случае, если* $2p > 1$ *и*

$$\int_\Omega q^{*-2p+1}(x)\, dx < \infty;$$

б) *справедливы оценки*

$$c_p^{-1} \int_\Omega q^{*-2p+1}(x)\, dx \leqslant \| L^{-1} \|_{\sigma_p}^p \leqslant \\ \leqslant c_p \int_\Omega q^{*-2p+1}(x)\, dx \qquad (2p > 1).$$

§ 2. Условия полноты системы корневых векторов. Из условия (2) вытекает, что значения функционала $\langle Lz, z\rangle$ лежат внутри угла раствора не большего $\pi/2$. Поэтому из равенств $\langle Lz, z\rangle = \langle y, L^{-1}y\rangle$, $y = Lz$ следует, что значения $\langle L^{-1}z, z\rangle$ также лежат внутри угла раствора не большего $\pi/2$. Отсюда и из теоремы Келдыша — Лидского [2, стр. 302] в силу следствия 1 получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполняются условия* (2). *Тогда, если*

$$\int_\Omega q^{*-3}(x)\, dx < \infty,$$

то система корневых векторов оператора L^{-1} *полна в* $L_2(\Omega)$.

В дальнейшем нам потребуется следующая

ЛЕММА 2. *Пусть здесь и в дальнейшем* $\Delta_x = [x - q^{*^{-1}}(x),\ x + q^{*^{-1}}(x)]$. *Тогда, если* $u \in C^\infty[\Delta_x] \cap C_0^\infty(\Omega)$, *то*

$$\int_{\Delta_x} |u'(t)|^2 dt + q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant 2^8 \int_{\Delta_x} (|u'(t)|^2 + |q(t)|\cdot|u(t)|^2)\, dt. \qquad (11)$$

Доказательство. Можно предположить, что

$$\int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt = 2q^{*^{-1}}(x). \qquad (12)$$

Если

$$\int_{\Delta_x} |u'(t)|^2 dt \geqslant 2^{-7} q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt,$$

то (11) очевидно. Если же

$$\int_{\Delta_x} |u'(t)|^2 dt \leqslant 2^{-7} q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt,$$

то, в силу (12), найдется точка $t_0 \in \Delta_x$ такая, что $|u(t_0)| = 1$. Поэтому при $y \in \Delta_x$ имеем

$$|u(t_0) - u(y)|^2 \leqslant \left(\int_{t_0}^{y} |u'(t)|\, dt\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2q^{*^{-1}}(x)\cdot 2^{-7} q^{*2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt = 2^{-5}.$$

Из этих неравенств, так как $|u(t_0)| = 1$, получаем, что $|u(t)| \geqslant 0{,}5$ при $t \in \Delta_x$. Следовательно, отрезок Δx вместе с некоторой окрестностью содержится в Ω и

$$\int_{\Delta_x} |q(t)|\cdot|u(t)|^2 dt \geqslant \frac{1}{4} \int_{\Delta_x} |q(t)|\, dt.$$

Отсюда и из определения $q^*(x)$, используя (12), будем иметь

$$\int_{\Delta_x} |q(t)|\cdot|u(t)|^2 dt \geqslant (1/4) \int_{\Delta_x} |q(t)|\, dt = (1/8\pi))\, q^*(x) =$$
$$= (1/(8\pi)\cdot 1/2)\, q^{*^2} \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt \geqslant (1/2^6)\, q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt.$$

Это доказывает (11).

ЛЕММА 3. *Если* $x \in \Omega$, *то*

$$A_x = \sup_{u \in C^\infty[\Delta_x]} \sup_{t \in \Delta_x} |u(t)|^2 \left(\int_{\Delta_x} |u'(\xi)|^2 d\zeta + \right.$$

$$\left. + q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(\xi)|^2 d\xi\right)^{-1} \leqslant \mathrm{const} \cdot q^{*-1}(x).$$

Доказательство. Сделав преобразование подобия $\xi \to q^{*-1}(x)\,\eta$, а затем сдвигая, если нужно начало координат, получаем:

$$A_x = q^{*-1}(x) \sup_{u \in C^\infty[-1,1]} \sup_{t \in [-1,1]} |u(t)|^2 \left(\int_{-1}^{1} (|u'(\xi)|^2 + \right.$$

$$\left. + |u(\xi)|^2)\, d\xi\right)^{-1} \leqslant \mathrm{const} \cdot q^{*-1}(x).$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $r(x)$ — *локально интегрируемая с квадратом в* Ω *функция. Тогда*

$$B = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega |r(t) u(t)|^2 dt \cdot \left(\int_\Omega (|u'(t)|^2 + |q(t)| \cdot \right.$$

$$\left. \cdot |u(t)|^2)\, dt\right)^{-1} \leqslant \sup \left\{(1/q^*(x)) \int_{\Delta_x} |r(t)|^2 dt \colon x \in \Omega\right\}.$$

Доказательство. Покроем Ω семейством отрезков $\{\Delta_{x_i}\}_{i=1}^{k}$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, кратность пересечения которых не больше 2. Это возможно. Очевидно,

$$B \leqslant 2 \sup_{\{i\}} \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Delta_{x_i}} |r(t)|^2 \cdot |u(t)|^2 dt \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{\Delta_{x_i}} (|u'(t)|^2 + |q(t)| \cdot |u(t)|^2)\, dt\right]^{-1}.$$

Воспользуемся леммой 2, а затем леммой 3:

$$B \leqslant \mathrm{const} \sup_{x \in \Omega} \sup_{u \in C^\infty[\Delta_x]} \int_{\Delta_x} |r(t)| \cdot |u(t)|^2 dt \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{\Delta_x} |u'(t)|^2 dt + q^{*^2}(x) \int_{\Delta_x} |u(t)|^2 dt\right]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}^2 \cdot \sup_{x \in \Omega} q^{*-1}(x) \int_{\Delta_x} |r(t)|^2 dt.$$

Лемма 4 доказана.

Из этой леммы и известной теоремы Фреше — Колмогорова [8, стр. 378] легко получается следующая

ЛЕММА 5. *Пусть* $|r(t)| > 0$ *в* Ω. *Тогда*

$$\mathfrak{F} = \left\{u \in C_0^\infty(\Omega) \colon \int_\Omega (|u'(t)|^2 + |q(t)| \cdot |u(t)|^2)\, dt \leqslant 1\right\}$$

относительно компактно по норме $\left(\int_\Omega |r(t)\, u(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$, *если* $\lim\limits_{|x|\to\infty} q^{*-1}(x) \int_{\Delta_x} |r(t)|^2\, dt = 0.$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\widetilde{L}$ — *оператор, аналогичный оператору* L, *соответствующий потенциалу* $\tilde{q}(x)$. *Предположим, что* $\operatorname{Im} \tilde{q}(x) = 0$. *Тогда*

а) *существует постоянная* $\gamma > 0$ *такая, что если для некоторого* $\lambda > 0$ *выполняется условие*

$$\sup_{x\in\Omega} (q_+ + \lambda)^{*-1}(x) \int_{\Delta_{\lambda,x}} q_-(t)\, dt < \gamma, \tag{13}$$

то оператор $\widetilde{L}$ *полуограничен снизу.*

Здесь

$$q_+(x) = \max(\tilde{q}(x), 0), \quad q_-(x) = \min(\tilde{q}(x), 0),$$

$$\Delta_{\lambda,x} = [x - (q_+ + \lambda)^{*-1}(x),\ x + (q_+ + \lambda)^{*-1}(x)];$$

б) *если* L — *полуограничен, то*

$$\sup_{x\in\Omega} (q_+ + \lambda)^{*-1}(x) \int_{\Delta^\varepsilon_{\lambda,x}} q_-(t)\, dt < \infty,$$

где λ *и* ε — *любые числа,* $\varepsilon \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, *а*

$$\Delta^\varepsilon_{\lambda,x} = [x - (1-\varepsilon)(q_+ + \lambda)^{*-1}(x),\ x + (1-\varepsilon)(q_+ + \lambda)^{*-1}(x)];$$

в) *если для некоторого достаточно малого* $\gamma > 0$ *выполняется* (13), *то для* $\lambda \gg 1$ *выпоняются неравенства*

$$c_\gamma^{-1} \langle(\widetilde{L} + \lambda E)\, y, y\rangle \leqslant \langle(L^+ + \lambda E)\, y, y\rangle \leqslant \leqslant c_\gamma \langle(\widetilde{L} + \lambda E)\, y, y\rangle, \quad y \in C_0^\infty(\Omega),$$

где c_γ *зависит от* γ, *а* L^+ — *оператор аналогичный* L, *соответствующий* $q_+(x)$.

Доказательство. При $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\langle \widetilde{L}u, u\rangle = \langle L^+u, u\rangle - \int_\Omega q_-(t)\, |u(t)|^2\, dt.$$

Отсюда и из леммы 4 следует а) и в). Оператор $\widetilde{L}$ полуограничен снизу в том и только в том случае, если для некоторого $\lambda > 0$ выполнено условие

$$\int_\Omega q_-(t)\,|u(t)|^2\,dt \leqslant \int_\Omega (|u'(t)|^2 + (q_+ + \lambda)\,|u(t)|^2)\,dt, \quad (14)$$

$$u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Если (14) выполняется для некоторого $\lambda > 0$, то для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\int_\Omega q_-(t)\,|u(t)|^2\,dt \leqslant c_\lambda \int_\Omega (|u'(t)|^2 + (q_+ + \lambda)\,|u(t)|^2)\,dt, \quad (15)$$

$$u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(-1,1)$ и $\omega_\varepsilon = 1$ на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Подставим в (15) функцию $\omega_\varepsilon((q_+ + \lambda)^*(x)(t-x))$, где x — любая фиксированная точка $\in \Omega$, и непосредственными вычислениями получаем б). Теорема 3 доказана.

Заметим, что хотя необходимое и достаточное условия в доказанной теореме близки между собой, они не совпадают.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполняются условия* (2). *Предположим, что*

$$\lim_{|x|\to\infty} (\operatorname{Re} q)^{*-1}(x) \int_{\Delta_x} \operatorname{Im} q(t)\,dt = 0$$

и

$$\int_\Omega (\operatorname{Re} q)^{*-p}(x)\,dx < \infty$$

при некотором $p \in (0, \infty)$. *Тогда система корневых векторов оператора* L *полна в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть L_+ — оператор аналогичный оператору L, соответствующий потенциалу $\operatorname{Re} q(x)$. Имеем, что $L_+ \geqslant E$, и в силу следствия, оператор L_+^{-1} имеет конечный тип. Из леммы 5 и условия доказываемой теоремы получаем, что оператор $\sqrt{|\operatorname{Im} q(x)|}\cdot\sqrt{L_+^{-1}}$ вполне непрерывен. Для доказательства теоремы 5 остается повторить рассуждения В. Б. Лидского из [1], примененные при доказательстве теоремы о полноте корневых векторов оператора Штурма — Лиувилля.

§ 3. **Обобщения.** Пусть Ω — открытое множество в I. Обозначим через L оператор, определенный равенством

$$Lu = (-1)^n u^{(2n)} + q(x) u$$

и граничными условиями Дирихле. Будем предполагать, что выполняются условия (2), и оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1}.

Введем функцию

$$q^*(x) = \inf\left\{d^{-1}:\ d^{-2n+1} \geqslant (2\pi)^n \int_{x-d}^{x+d} |q(t)|\, dt\right\}.$$

Используя вместо теоремы 1 из [6] теорему 3 из [9], повторяя доказательство теоремы 1, получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $N(\lambda)$ — количество s-чисел оператора L, не превосходящих λ. Тогда*

$$c^{-1}\lambda^{1/(2n)} \mu\,(x \in \Omega:\ q^*(x) \leqslant c^{-1}\lambda^{1/(2n)}) \leqslant N(\lambda) \leqslant \leqslant c\lambda^{1/(2n)} \mu\,(x \in \mathbf{R}^n:\ q^*(x) \leqslant c\lambda^{1/(2n)}).$$

Из этой теоремы выводится

ТЕОРЕМА 6. а) *оператор L^{-1} принадлежит классу σ_p в том и только в том случае, если $2np > 1$ и $\int_\Omega q^{*^{-2np+1}}(x)\, dx < \infty$;*

б) *справедливы оценки*

$$c^{-1}\left(\int_\Omega q^{*^{-2np+1}}(x)\, dx\right)^{1/p} \leqslant \|L^{-1}\|_{\sigma_p} \leqslant c\left(\int_\Omega q^{*^{-2np+1}}(x)\, dx\right)^{1/p}.$$

На основании этой теоремы, также как и теорема 3, доказывается следующая

ТЕОРЕМА 7. *Если*

$$\int_\Omega q^{*^{-4n+1}}(x)\, dx < \infty,$$

то система корневых векторов оператора L^{-1} полна в $L_2(\Omega)$.

Эта теорема является обобщением теоремы 2. Другую теорему из § 2 о полноте корневых векторов (теорему 4) распространить на случай уравнений высших порядков автору не удалось. Причиной является отсутствие леммы, аналогичной лемме 2 из § 2.

Институт математики
и механики АН Каз.ССР

Поступило
13.XII.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Лидский В. Б., Несамосопряженный оператор типа Штурма — Лиувилля с дискретным спектром, Тр. Моск. матем. об-ва, 9 (1960), 45—80.

[2] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1965.

[3] Молчанов А. М., Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, Тр. Моск. матем, об-ва, 2 (1953), 169—200.

[4] Отелбаев М., О спектре некоторых дифференциальных операторов, Кандидатск. дисс., МГУ, 1972.

[5] Отелбаев М., Раимбеков Д. Ж., О типе резольвенты несамосопряженного оператора, Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-матем., № 1 (1975), 62—67.

[6] Отелбаев М., Двусторонняя оценка распределения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля, Матем. заметки, 20, № 6 (1976), 859—867.

[7] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.

[8] Иосида К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.

[9] Отелбаев М., Двусторонние оценки поперечников и их применение, Докл. АН СССР, **231**, № 4 (1976), 810—183.