ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 21 **Ноябрь 1981 Декабрь** **№ 6**

УДК 519.614

ОЦЕНКА НАИМЕНЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

МУСИЛИМОВ Б., ОТЕЛБАЕВ М.
(Алма-Ата)

Дается двусторонняя оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц. Этот класс матриц соответствует разностному уравнению Штурма–Лиувилля.

При приближенном вычислении собственных значений дифференциальных операторов возникает необходимость вычисления собственных значений некоторых конечномерных матриц. Эти вычисления обычно проводятся приближенно. Эффективных формул для точного вычисления собственных значений матриц порядка не менее 5 в общем случае не существует. В различных задачах вычислительной математики (см., например, [1, с. 109, 142, 200]), а также при приближенном вычислении собственных значений весьма важно предварительно получить оценки пределов их значений. Обычно легко указать грубые, но эффективные оценки сверху или снизу. Получить достаточно точные эффективные двусторонние оценки хотя бы для наименьшего собственного значения, по-видимому, в общей ситуации невозможно.

В настоящей заметке для наименьших собственных значений одного класса матриц $\{A\}$ получены оценки вида $a_0(A)/8\leqslant\lambda_0(A)\leqslant 15a_0(A)$, где $a_0(A)$ выписывается через элементы матрицы $A\in\{A\}$. Рассматриваемый класс матриц включает множество матриц, соответствующее разностным уравнениям Штурма — Лиувилля.

Пусть A есть n-мерная матрица

$$(1)\qquad \left\|\begin{matrix} c_1+2 & -1 & & & & \\ -1 & c_2+2 & -1 & & 0 & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -1 & c_{n-1}+2 & -1 \\ & 0 & & & -1 & c_n+2 \end{matrix}\right\|,$$

где $c_i\geqslant 0$.

Через l_2^n обозначим n-мерное гильбертово пространство векторов $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$ с нормой, соответствующей скалярному произведению

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i.$$

Здесь $\bar{y}_i$ — число, комплексно-сопряженное числу y_i. Матрице A соответствует квадратичная форма

$$(Ay, y) = \sum_{i=2}^{n-1} [-y_{i-1} + (c_i+2) y_i - y_{i+1}] \bar{y}_i +$$

$$+ (c_1+2) |y_1|^2 - y_2 \bar{y}_1 + (c_n+2) |y_n|^2 - y_{n-1} \bar{y}_n.$$

Упростим правую часть:

$$(2) \qquad (Ay, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i |y_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 -$$

$$- \sum_{i=2}^{n} (y_{i-1} \bar{y}_i + y_{i+1} \bar{y}_i) - y_2 \bar{y}_1 - y_{n-1} \bar{y}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i |y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n+1} |y_i - y_{i-1}|^2;$$

здесь и в дальнейшем для удобства считаем, что $y_0 = y_{n+1} = 0$.

Матрица A является неотрицательной и самосопряженной. Для получения оценки наименьшего собственного значения A будем пользоваться вариационным принципом (см. [2, с. 45]). Если A — неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и λ_0 — наименьшее собственное значение оператора A, то

$$\lambda_0 = \inf (Ay, y)_H \|y\|_H^{-2},$$

где инфимум берется по всем $y \in H$, $y \neq 0$.

Введем необходимые обозначения. Положим

$$(3) \qquad k_i = \begin{cases} \max\left\{k : [2(k+1)]^{-1} \geq \sum_{j=i-k}^{i+k} c_j,\ 1 \leq i-k \leq i+k \leq n\right\}, & c_i < 1/2, \\ 0, & c_i \geq 1/2, \end{cases}$$

и обозначим через c_j^* новую последовательность, введенную формулой

$$(4) \qquad c_j^* = \max([2(k_j+1)]^{-1}, c_j).$$

Оценку наименьшего собственного значения матрицы A дает следующая

Теорема. *Имеет место оценка*

$$(5) \qquad a_0/8 \leq \lambda_0 \leq 15 a_0,$$

где

$$a_0 = \inf\left\{\frac{c_j^*}{2(k_j+1)} : 1 \leq j \leq n\right\}.$$

Доказательство. Пусть $i_0 = r$ — произвольное фиксированное число, $1 \leq r \leq n$. Если $c_{i_0} \geq 1/2$, то $k_r = 0$. Возьмем такой вектор $y = (y_0, \ldots$

$\ldots, y_{n+1})$, где $y_r=1$ и $y_i=0$ при $i\neq r$. Тогда

$$(Ay, y)=2+c_r|y_r|^2=2+c_r, \qquad \|y\|^2=1,$$

так как у нас $y=(y_0,\ldots, y_{n+1})$ и $y_0=y_{n+1}=0$. Поэтому

$$(6) \qquad (Ay, y)\|y\|^{-2}=2+c_{i_0}\leqslant\frac{15c_r^*}{2(k_r+1)}.$$

Если $c_i<{}^1/_2$, то возьмем $y_l=0$, $1\leqslant l\leqslant r-k_r-1$; $y_{i-k_r}=1$, $y_{i-k_r+1}=2,\ldots, y_{r-1}=$ $=k_i$, $y_r=k_r+1$, $y_{i+1}=k_r,\ldots, y_{r+k_r-1}=2$, $y_{i+k_r}=1$; $y_s=0$, $i+k_r+1\leqslant s\leqslant n$. Имеем

$$(Ay, y)\leqslant 2(k_r+1)+\sum_{i=r-k_r}^{r+k_r} c_i(k_r+1)^2, \qquad \|y\|^2\geqslant\frac{2}{3}(k_r+1)^3.$$

Поэтому

$$(Ay, y)\|y\|^{-2}\leqslant\frac{3}{2}\left[2(k_r+1)^{-2}+\sum_{i=r-k_r}^{r+k_r} c_i(k_r+1)^{-1}\right].$$

Так как, по определению (3) и (4),

$$\sum_{i=r-k_r}^{r+k_r} c_i\leqslant\frac{1}{2(k_r+1)}=c_r^*,$$

то получаем, что

$$(6') \qquad (Ay, y)\|y\|^{-2}\leqslant\frac{15c_r^*}{2(k_r+1)}.$$

Отсюда и из (6), в силу произвольности числа i_0, вытекает справедливость правого неравенства в (5). Докажем левое неравенство в (5).

Возьмем произвольное фиксированное целое j, $1\leqslant j\leqslant n$. Пусть $c_j<{}^1/_2$ и $y=(y_0,\ldots, y_{n+1})$ — произвольный элемент из гильбертова пространства l_2^n (напомним, что по условию $y_0=y_{n+1}=0$). Обозначим через

$$a=\sum_{i=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{i+1}-y_i|^2.$$

Возможны два случая:

$$(7) \qquad a\geqslant\theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2,$$

$$(7') \qquad a<\theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2.$$

Если выполнено (7), то очевидно, что

$$(8) \qquad \sum_{i=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{i+1}-y_i|^2+\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}c_i|y_i|^2\geqslant\theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2.$$

Если же выполнено (7′), то существует j_0 такое, что $j-k_j-1\leqslant j_0\leqslant j+k_j+1$ и $|y_{j_0}|=\sup\{|y_i|: j-k_j-1\leqslant i\leqslant j+k_j+1\}$. Имеем $|y_i-y_{j_0}|\leqslant|y_i-y_{i-1}|+|y_{i-1}-y_{i-2}|+\ldots+|y_{j_0+1}-y_{j_0}|$ при $i\geqslant j_0$ и $|y_i-y_{j_0}|\leqslant|y_i-y_{i+1}|+|y_{i+1}-y_{i+2}|+\ldots+|y_{j_0-1}-y_{j_0}|$ при $i\leqslant j_0$. Отсюда, пользуясь неравенством Коши — Буняковского для i, удовлетворяющего условию $j-k_j-1\leqslant i\leqslant j+k_j+1$, получаем $|y_i-y_{j_0}|\leqslant[2(k_j+1)]^{1/2}a^{1/2}$.

Воспользуемся (7′):

$$|y_{j_0}-y_i|\leqslant[2(k_j+1)]^{1/2}\left[\theta^{-1}\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant[\theta^{-1}c_j^*(2k_j+1)]^{1/2}|y_{j_0}|.$$

Из определения c_j^* следует, что $c_j^*=[2(k_j+1)]^{-1}$, поэтому $\theta^{-1}c_j^*(2k_j+1)\leqslant\leqslant\theta^{-1}$. Следовательно,

$$|y_{j_0}-y_i|\leqslant\theta^{-1/2}|y_{j_0}| \text{ и } |y_i|\geqslant\frac{\theta^{1/2}-1}{\theta^{1/2}}|y_{j_0}|.$$

Но тогда

$$\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}c_i|y_i|^2\geqslant\left(\frac{\theta^{1/2}-1}{\theta^{1/2}}\right)^2\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}c_i|y_{j_0}|^2\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\theta^{1/2}-1}{\theta^{1/2}}\right)^2\frac{c_j^*}{2(k_j+1)}\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2.$$

Отсюда, выбирая $\theta=4$, и получаем (8).

Если $c_j\geqslant{}^1/_2$, то из определения c_j^* вытекает $c_j^*=c_j$ и $k_j=0$. Следовательно, выполнено (8).

Таким образом, в обоих случаях имеет место неравенство (8).

Из (8) и определения a_0 вытекает

$$\sum_{i=j-k_j-1}^{j+k_j}|y_{i+1}-y_i|^2+\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}c_i|y_i|^2\geqslant\frac{1}{4}a_0\sum_{i=j-k_j}^{j+k_j}|y_i|^2,\qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{9}$$

Возьмем числа $1\leqslant j_1<\ldots<j_l$. Обозначим через Δ_s множество целых точек в отрезке $[j_s-k_{j_s}, j_s+k_{j_s}]$. При $k_{j_s}=0$ множество Δ_s состоит из одной точки j_s.

Числа j_s выберем таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: множество $\bigcup_{s=1}^{l}\Delta_s$ содержит все числа $1, 2,\ldots, n$ и $\Delta_{s_0}\cap\Delta_{s_1}=\varnothing$ при $|s_0-s_1|\geqslant2$. Здесь $\varnothing$ — пустое множество. Существование такого набора $\{j_s\}_{s=1}^l$ нетрудно доказать, исходя из определения c_j^* и k_j.

Далее, в силу (9), имеем

$$\sum_{i=0}^{n}|y_{i+1}-y_i|^2+\sum_{i=0}^{n}c_i|y_i|^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}\Big[\sum_{i=j_s-k_s-1}^{j_s+k_s+1}(|y_{i+1}-y_i|^2+c_i|y_i|^2)\Big]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{8}a_0\sum_{s=1}^{l}\Big(\sum_{i=j_s-k_s-1}^{j_s+k_s+1}|y_i|^2\Big)\geqslant\frac{1}{8}a_0\sum_{i=0}^{n}|y_i|^2.$$

Из этого неравенства и вариационного принципа вытекает, что $\lambda_0\geqslant a_0/8$. Теорема полностью доказана.

Эффективность формулы (5) доказывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть в матрице (1) будет $n=2k+1$ и $c_{2i+1}\geqslant{}^1/_2$ при $i=0, 1,\ldots, k$ и $0\leqslant c_{2j_0}\leqslant{}^1/_2$ хотя бы при одном $j=j_0$, $0<j\leqslant k$; тогда из (3) получаем, что $k_j=0$ для всех $j=1, 2,\ldots, 2k+1$. Поэтому из (4) вытекает $c_j^*\geqslant{}^1/_2$. Но легко видеть, что $c^*_{2j_0}={}^1/_2$. Следовательно, $a_0={}^1/_4$. Отсюда и из теоремы находим ${}^1/_{32}\leqslant\lambda_0\leqslant{}^{15}/_4$.

Этот пример показывает, что, имея довольно скудную информацию о $\{c_j\}_{j\geqslant1}$, можно из теоремы получать двусторонние оценки для наименьшего собственного значения матрицы (1).

Пример 2. Пусть в матрице (1) будет $n=2k+1$. Предположим, что

$$c_1\geqslant1,\ldots, c_{r-1}\geqslant1, c_r=0,\ldots, c_{r+\alpha}=0, c_{r+\alpha+1}\geqslant1,\ldots, c_{2k+1}\geqslant1,$$

где r и α — целые положительные числа такие, что $1<r$, $r+\alpha\leqslant2k+1$, причем α нечетно.

В этом случае простые вычисления дают, что $a_0=(\alpha+3)^{-2}$. Поэтому

$$8(\alpha+3)^{-2}\leqslant\lambda_0\leqslant15(\alpha+3)^{-2}.$$

Замечание. Для большого количества задач математической физики вычисления строятся таким образом, что на каждом шаге приходится решать трехточечные уравнения вида

$$A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i,\qquad i=1, 2,\ldots,\qquad A_i\neq0,\quad B_i\neq0,\tag{10}$$

с некоторыми краевыми условиями.

Эта задача является классической, к ней сводятся многие сложные задачи теории вычислительных методов (см. [1, с. 39]). Систему уравнений (10) нетрудно привести к такой, чтобы соответствующая матрица имела вид (1).

Литература

1. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.
2. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах на собственные значения. М.: Мир, 1970.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 13.II.1980
Переработанный вариант 18.XII.1980